

école
normale
supérieure
paris-saclay



ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE PARIS SACLAY

RAPPORT DE STAGE RÉALISÉ DANS LE CADRE DU M1 HADAMARD

Métriques de Klein et généralisation sur l'espace projectif réel

Clément CREN

ccren@ens-paris-saclay.fr

Sous la direction de :

Charles BOUBEL

charles.boubel@unistra.fr

Résumé

On s'intéresse ici aux métriques de Klein. Au XIX^{ème} siècle, les mathématiciens essayent toujours de prouver le 5^{ème} postulat d'Euclide (axiome des parallèles : étant donnée une droite du plan et un point en dehors de cette droite, il existe au plus une droite parallèle à la première et passant par ce point) lorsque Gauss, Bolyai et Lobachevsky découvrent des géométries non euclidiennes où ce postulat est faux. Ces modèles ne sont cependant qu'axiomatiques et il faudra attendre la fin du siècle et d'autres mathématiciens comme Beltrami, Cayley et Klein pour avoir des modèles concrets de ces géométries. Dans son article [3], Klein construit en parallèle les géométries sphériques (distance ronde sur l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$) et hyperboliques (modèle du disque de Klein-Beltrami) à l'aide de la géométrie projective et des quadriques

$$X_1^2 + \dots + X_n^2 = \epsilon X_{n+1}^2$$

avec ϵ valant respectivement -1 et $+1$. Nous détaillerons la construction et son origine. Le modèle hyperbolique sera généralisé plus tard par Hilbert, donnant naissance aux géométries de Hilbert sur les domaines convexes de \mathbb{R}^n . Celles ci ont été le sujet de nombreuses études (voir [4, 5, 2]) qui ont influencé la résolution du quatrième problème de Hilbert (en dimension 2 par Ambartzumian en 1976) dont l'interprétation moderne est : décrire les distances sur des domaines convexes de \mathbb{R}^n dont les géodésiques sont les droites euclidiennes. Cette généralisation de la distance hyperbolique par Hilbert fut donc une idée féconde. Nous nous intéressons ici à l'autre distance décrite par Klein à savoir la distance ronde sur l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$ et à de potentielles généralisations.

Les premières parties consistent en des rappels de géométrie projective et finslérienne, d'une description des constructions de Klein et de la généralisation faite par Hilbert de la distance hyperbolique. Il ne s'agit pas de faire un état de l'art complet mais de donner les outils pour comprendre les constructions faites et motiver les tentatives de généralisation de la suite. La cinquième partie traite de l'impossibilité de généraliser la construction de Klein de la distance ronde sur $\mathbb{R}P^n$ en remplaçant la quadrique par une sous-variété de codimension réelle 2 sans point réel. La sixième partie propose un autre point de vue sur la distance de Klein en intégrant des distances obtenues par la construction de Klein mais dégénérées (elles ne seront individuellement pas séparantes) selon certaines mesures, donnant lieu à une potentielle généralisation.

Abstract

This report focuses on Klein's metrics. In the XIXth century, mathematicians were still trying to prove Euclid's fifth postulate (parallel postulate : in a plane, given a line and a point not on it, there exists a unique line parallel to the given line can be drawn through the point) when Gauss, Bolyai and Lobachevsky developed axiomatic models of non-euclidean geometries where this postulate was false. As these models were only axiomatic, it was not until the end of the century that others mathematicians like Beltrami, Cayley and Klein developed concrete models of these geometries. In his article [3], Klein introduces in the same way the spherical geometry (round metric on the projective space \mathbb{RP}^n) and the hyperbolic one (Klein-Beltrami disk model) through projective geometry and the quadric

$$X_1^2 + \dots + X_n^2 = \epsilon X_{n+1}^2$$

with ϵ value equals respectively -1 and $+1$. We will detail the construction and its origin. The hyperbolic model will be generalized by Hilbert, giving birth to Hilbert geometries for convex domains of \mathbb{R}^n . They have been the topic of many studies (see [4, 5, 2]) that influenced the resolution of Hilbert's fourth problem (in dimension 2 by Ambartzumian in 1976) which modern interpretation can be : describe metrics on convex domains of \mathbb{R}^n whose geodesics are euclidean straight lines. Thus, this idea of generalising the hyperbolic model was very fecund. We will put emphasis here on the other metric described by Klein : the round metric on the projective space \mathbb{RP}^n and some possible generalizations.

The first parts deal with common knowledge on projective and finslerian geometry and Klein's metrics : from their construction to the generalization by Hilbert of the hyperbolic model. It won't be a complete state of the art but it will provide tools to understand all these construction and motivate a possible generalization. The fifth part deals with the impossibility of generalising Klein's construction of the round metric by replacing the quadric with another submanifold of real codimension 2 without real point. The sixth part suggests a new approach on Klein's metric by integrating other metrics obtained by Klein's method but degenerated (they won't necessarily be separating) against some measure, leading to a potential generalization.

Table des matières

Introduction	4
1 Géométrie projective	4
1.1 Espace projectif	4
1.1.1 Définition et coordonnées homogènes	4
1.1.2 Projection de sous-espaces, d'applications	5
1.2 Cas des espaces vectoriels normés	7
1.3 Théorèmes importants	7
1.3.1 Menelaüs	7
1.3.2 Théorème fondamental	8
1.4 Droite projective et birapport	9
2 Variétés finslériennes, riemanniennes	11
3 Géométrie de Klein	12
3.1 Quadriques	12
3.2 Construction de Klein	13
3.3 Points d'intersection imaginaires et métrique sphérique	14
3.4 Points d'intersection réels et modèle hyperbolique de Klein-Beltrami	15
4 Géométries de Hilbert	15
4.1 Métriques de Funk et Hilbert	15
4.1.1 Métrique de Hilbert	15
4.1.2 Métrique de Funk	17
4.2 Structure finslérienne	18
4.3 Géodésiques	20
5 Déformation d'une quadrique complexe	22
5.1 Préambule : Distance relative à une paire de droites complexes conjuguées	22
5.2 Cas auto-conjugué	24
5.3 Idées d'une démonstration plus générale	28
6 Déformation des mesures	29
6.1 Mesures sur l'ensemble des droites projectives complexes conjuguées	29
6.1.1 Construction de métriques	29
6.1.2 Lien avec la construction de Klein	30
6.2 Mesures discrètes	32
6.2.1 Cas de deux couples de droites	33
6.2.2 Cas de trois couples de droites distincts	35
Conclusion	37
Références	37

Introduction

Dans le cadre du M1 Hadamard à l'ENS Paris-Saclay, j'ai effectué un stage d'environ 4 mois, du 16 avril au 27 juillet 2018 à l'université de Strasbourg. Ce stage a été encadré par Charles Boubel, membre de l'équipe Géométrie de l'IRMA (Institut de Recherche Mathématique Avancée) et je tiens à le remercier pour avoir accepté de m'encadrer, pour sa disponibilité et les réponses qu'il a pu m'apporter, aussi bien dans le domaine purement mathématique que celui de la recherche en mathématiques.

Le domaine des géométries de Klein et Hilbert prend sa source au XIX^{ème} siècle comme réponse négative à une potentielle preuve du 5^{ème} postulat d'Euclide. Les géométries de Hilbert ont depuis été le sujet de nombreuses études aussi bien sur des propriétés générales (distinguer celles issues d'une ellipse et donc construites par Klein parmi les autres) que sur des cas particuliers (distances de Hilbert sur des polytopes convexes) comme illustré dans [4, 5, 2]. Elles ne s'appuient cependant que sur la construction par Klein de la géométrie hyperbolique, pourtant construite en parallèle de la géométrie sphérique, or cette dernière n'a a priori pas connu de tels développements. C'est ce que nous essayons de faire ici dans les cinquième et sixième parties, d'abord en essayant de mimer la méthode de Hilbert, à savoir remplacer la quadrique par une autre sous-variété de codimension réelle 2 (ici sans point réel) puis en adoptant un nouveau point de vue sur la construction de Klein. Les résultats de la partie 5 sont a priori nouveaux et feront certainement l'objet d'une publication dans le courant de l'année.

1 Géométrie projective

1.1 Espace projectif

1.1.1 Définition et coordonnées homogènes

\mathbb{K} est un corps commutatif.

Définition. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} . On définit l'espace projectif associé à E comme étant :

$$P(E) := E \setminus \{0\} / \sim$$

où \sim est la relation de colinéarité.

Définition. On note $\mathbb{K}\mathbb{P}^n := P(\mathbb{K}^{n+1})$.

Propriété. L'action naturelle de $\mathrm{GL}(E)$ sur E induit une action sur $P(E)$ qui se quotiente en une action de $\mathrm{PGL}(E) := \mathrm{GL}(E) / E \setminus \{0\}$ selon le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(E) & \rightsquigarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{PGL}(E) & \rightsquigarrow & P(E) \end{array}$$

Corollaire. On a une action naturelle $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{K}) \rightsquigarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^n$.

On se place dans le cadre d'espaces vectoriels de dimension finie.

Définition. On se donne une base (e_0, \dots, e_n) de \mathbb{K}^n et soit p la projection sur l'espace projectif. On appelle coordonnées homogènes d'un point A de l'espace projectif n'importe quel $n+1$ tuple (x_0, \dots, x_n) tel que $p(\sum x_i e_i) = A$.

Si (x_0, \dots, x_n) est coordonnée homogène d'un point alors les autres coordonnées homogènes de ce point sont exactement les (ax_0, \dots, ax_n) avec $a \neq 0$.

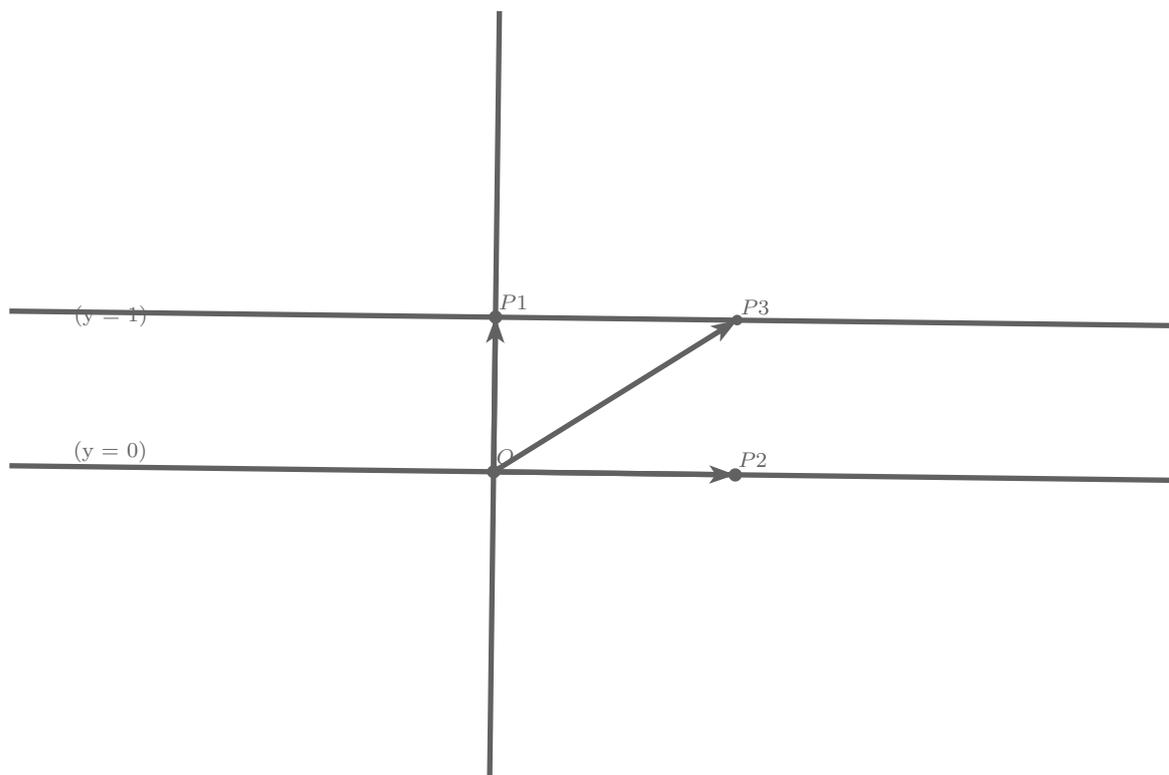
On privilégie alors $p((x_0 = 1))$ et $p((x_0 = 0))$. Le premier correspond à \mathbb{K}^n et le deuxième à \mathbb{K}^n quotienté par la relation de colinéarité soit $\mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1}$, ce sont les points dits à l'infini.

Théorème. Les systèmes de coordonnées homogènes sont entièrement déterminés par :

-Les points bases $P_i = p(e_i)$

-Le point P_{n+1} de coordonnées homogènes $(1, \dots, 1)$ appelé point unité.

Démonstration. En effet les seuls points bases ne suffisent pas à retrouver les vecteurs e_0, \dots, e_n . En effet ils pourraient aussi être les images de $a_0e_0, \dots, a_n e_n$ pour des a_i à priori tous différents. Rajouter P_{n+1} permet de savoir que les a_i sont tous égaux et les bases sont alors identiques à un facteur près. \square



La figure illustre le théorème. Le point $P1$ donne le zéro de la droite projective, $P2$ l'infini et $P3$ l'unité. La droite $y = 1$ est alors identifiée à \mathbb{K} et la droite $y = 0$ donne un point à l'infini.

1.1.2 Projection de sous-espaces, d'applications

Définition. Une variété linéaire projective de $P(E)$ est l'image par la projection d'un sev de E (privé de 0). On appelle sa dimension celle du sev projeté - 1 (ie $\mathbb{K}\mathbb{P}$ est de dimension n).

Propriété. Un hyperplan projectif a pour équation $a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$ où les a_i sont non tous nuls. Une vlp de codimension k a donc pour équations : $\sum_{i=0}^n a_{ij}x_i = 0, j = 1, \dots, k$ où la famille $((a_{ij})_i)_j$ est libre (ie les équations sont linéairement indépendantes).

Démonstration. Ce sont les équations dans le cas vectoriel, il suffit de voir qu'elles ont toujours le même sens en coordonnées homogènes. \square

Définition. Une variété linéaire affine L est sous espace affine de l'espace affine E i.e. si on note $v(E)$ l'espace vectoriel associé, on a $L = a + V$ où $a \in E$ et V est un sev de $v(E)$.

Propriété. Un hyperplan affine est caractérisé par une équation de la forme $a_0x_0 + \dots + a_nx_n = b$. Une vla de codimension k est caractérisée par k équations linéairement indépendantes de la forme précédente.

Définition. Soit $E = a + v(E)$ un \mathbb{K} espace affine. Sa clôture projective est l'espace :

$$\hat{E} := P(v(E) \times \mathbb{K})$$

On injecte E dans \hat{E} par $j_a : m \mapsto (m - a, 1)$.

Définition. Soient E, F des espaces vectoriels, $u : E \mapsto F$ une application linéaire injective, alors u passe au quotient en une application $P(u) : P(E) \mapsto P(F)$. On parle d'application projective et si $P(u)$ est bijective (ie u bijective i.e. $\dim(E) = \dim(F)$) alors on parle d'homographie.

Propriété. $\forall u \in \mathcal{L}(E, F), v \in \mathcal{L}(F, G), P(v \circ u) = P(v) \circ P(u)$ et $P(id) = id$.

Propriété.

$$P(u) = P(u') \rightarrow \exists a \in \mathbb{K} \setminus \{0\} u' = au$$

Démonstration. l'égalité des applications projectives donne $\forall x \exists a(x), u'(x) = a(x)u(x)$. Il est alors bien connu que a est une application constante et on a bien le résultat. \square

Théorème. Soient $(P_0, \dots, P_{n+1}), (P'_0, \dots, P'_{n+1})$ deux repères projectifs de $P(E)$. Alors il existe une unique homographie f telle que $\forall i, f(P_i) = P'_i$.

Démonstration. On relève les deux repères en des bases $(e_0, \dots, e_n), (e'_0, \dots, e'_n)$ de E avec $P_{n+1} = P(e_0 + \dots + e_n)$ et $P'_{n+1} = P(e'_0 + \dots + e'_n)$.

Soit alors u l'unique application linéaire qui envoie e_i sur e'_i . C'est un automorphisme et l'homographie $P(u)$ convient.

Si on a une telle application h , on l'écrit $h = P(v)$. Alors $v(e_i) = \alpha_i e'_i$ mais la condition $h(P_{n+1}) = P'_{n+1}$ impose aux α_i d'être égaux à un certain α et donc $v = \alpha u$ et donc $h = P(u)$. \square

Définition. Soient E, F des espaces affines, $f : E \mapsto F$ une application affine. On pose $v(f)$ l'application linéaire de $v(E)$ dans $v(F)$ associée. On pose alors : $\hat{f} = P(f \times id_{\mathbb{K}})$.

Propriété. On a $\hat{f}(j_a(m)) = j_{f(a)}(f(m))$ pour $m \in E$

Corollaire. Le groupe affine de E s'injecte dans le groupe des homographies de \hat{E} par l'ensemble des homographies laissant l'hyperplan à l'infini $P(v(E) \times \{0\})$ globalement invariant.

On voit alors l'espace affine E comme le complémentaire de l'hyperplan projectif $P(v(E) \times \{0\})$. Réciproquement si on se donne un hyperplan H de l'espace projectif P et qu'on prend des coordonnées homogènes (x_0, \dots, x_n) de sorte que $H = (x_0 = 0)$, un point $m \in P \setminus H$ s'identifie à un point de coordonnées affines $(x_0^{-1}x_1, \dots, x_0^{-1}x_n)$.

Une vla non située à l'infini a alors une équation de la forme $a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$ (dans le cas d'un hyperplan, sinon on prend plusieurs équations indépendantes de ce type).

Définition. Soit F un polynôme homogène. L'ensemble défini par $F(x_0, \dots, x_n) = 0$ est appelé une partie algébrique de E (idem si on prend plusieurs équations polynomiales homogènes). Puisque les polynômes sont homogènes, on peut parler de parties algébriques de $P(E)$.

En reprenant les notations précédentes, si une famille de polynômes homogènes F_j à $n + 1$ variables caractérisent une partie algébrique de P , son intersection avec $P \setminus H$ est caractérisée par $\forall j, F_j(1, y_1, \dots, y_n) = 0$, c'est une partie algébrique de l'espace affine E .

Réciproquement, on part d'un espace affine E . On le plonge dans $P = \hat{E}$ via j_a . Un v de E caractérisée par $\forall j, a_{0j} + a_{1j}y_1 + \dots + a_{nj}x_n = 0$ se projette dans \hat{E} et devient sa clôture projective \hat{L} caractérisée par $\forall j, a_{0j}x_0 + a_{1j}y_1 + \dots + a_{nj}x_n = 0$. On obtient alors en notant H l'hyperplan à l'infini, $\hat{L} \cap (P \setminus H) = L$.

Si on a maintenant une partie algébrique A de E caractérisée par le polynôme (non nécessairement homogène) F de degré d , on homogénéise F qui devient F_h en une variable supplémentaire défini par : $F_h(x_0, \dots, x_n) = x_0^d F(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0)$. Soit \hat{A} la partie algébrique de \hat{E} caractérisée par F_h , on l'appelle la clôture projective de A et on a $\hat{A} \cap (P \setminus H) = A$. Les points de $\hat{A} \setminus A$ sont les points à l'infini de A , c'est une partie algébrique de H .

1.2 Cas des espaces vectoriels normés

On supposera maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

Proposition. Soit \mathcal{S}_n la sphère unité de \mathbb{K}^{n+1} alors :

$$\mathbb{K}\mathbb{P}^n = \mathcal{S}_n / \{\pm 1\}$$

Démonstration. La sphère contient toutes les directions, elles sont justes comptées deux fois par x et $-x$. \square

Corollaire. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. \mathbb{C}) alors $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ est une variété \mathcal{C}^∞ (resp. holomorphe) de dimension n .

Corollaire. $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ est connexe par arcs, de plus on a :

$$\forall n \geq 1, \pi_1(\mathbb{K}\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Sauf $\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}$.

Démonstration. On a $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \simeq \mathcal{S}_1(\mathbb{R})$ donc son groupe fondamental est \mathbb{Z} .

Dans les autres cas, on a un revêtement de degré 2 de la sphère sur l'espace projectif, la sphère étant simplement connexe, c'est le revêtement universel et le groupe fondamental est $\{\pm 1\}$. \square

1.3 Théorèmes importants

1.3.1 Menelaüs

Théorème (Menelaüs). Soient A, B, C des points non alignés du plan et D, E, F des points appartenant respectivement aux droites $(BC), (AC), (AB)$ (mais distincts des sommets). Alors D, E, F sont alignés ssi

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1$$

Démonstration. Supposons les points alignés. Soit A' le point de (DF) tel que (AA') et (BC) soient alignés. Par théorème de Thalès on a

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}}$$

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$$

d'où

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}} \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$$

Et le résultat.

Réciproquement, supposons par l'absurde que (EF) et (BC) soient parallèles. Le théorème de Thalès donne $\frac{EA}{EC} = \frac{FA}{FB}$. En combinant cela avec l'hypothèse on obtient $\overline{DB} = \overline{DC}$ d'où $B = C$ ce qui est absurde. Les droites (EF) et (BC) sont donc sécantes en un point I . La première implication nous donne alors

$$\frac{\overline{IB} \overline{EC} \overline{FA}}{\overline{IC} \overline{EA} \overline{FB}} = 1$$

En combinant avec l'hypothèse, on obtient :

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$$

Et donc $D = I$ puis D, E et F sont alignés. □

1.3.2 Théorème fondamental

Théorème (fondamental de la géométrie projective). *Soient V un \mathbb{K} -ev et V' un \mathbb{K}' -ev les deux de dimension $n \geq 2$. Soit $f : P(V) \mapsto P(V')$ une bijection qui conserve l'alignement des points. Alors il existe une bijection $g : V \mapsto V'$ additive et telle que $\forall x \in V, \forall a \in \mathbb{K}, g(ax) = s(a)g(x)$ où $s : \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}'$ est un isomorphisme de corps.*

Démonstration. On se donne un repère projectif (a_0, \dots, a_n) de $P(V)$. On note L_j la vlp engendrée par a_0, \dots, a_j et L'_j celle engendrée par leurs images par f . Par récurrence on a $f(L_j) \subset L'_j$. En effet, si $m \in L_j$ alors la droite $(a_j m)$ rencontre L_{j-1} en un point p . Par définition de f , les points $f(m), f(p)$ et $f(a_j)$ sont alors alignés et $f(p) \in L'_{j-1} \subset L'_j$ par hypothèse de récurrence d'où $f(m) \in L'_j$. On en déduit que $f(a_0), \dots, f(a_n)$ forme un repère projectif de $P(V')$. De plus si les points a_0, \dots, a_j, m sont projectivement indépendants, il en est de même pour leurs images par f et donc $f(m) \notin L'_j$. La surjectivité de f entraîne alors $f(L_j) = L'_j$.

On fixe une origine O et un hyperplan à l'infini H de $P(V)$. $H' = f(H)$ est alors un hyperplan de $P(V')$ qu'on fixe comme étant à l'infini. On prendra $O' = f(O)$ comme origine. f donne alors une bijection de $E = P(V) \setminus H$ sur $E' = P(V') \setminus H'$. On s'intéresse alors à l'application g qui est la restriction de f à E et à valeurs dans E' .

g transforme les droites en droites et conserve leur parallélisme. g conserve alors les parallélogrammes, d'où si x et y sont indépendants, $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Si $y \in \mathbb{K}x$ alors on prend z linéairement indépendant de x (on peut car $n \geq 2$) il l'est alors aussi de y et $x+y, y+z$ est aussi indépendant de x . On a alors $g(x) + g(y) + g(z) = g(x) + g(y+z) = g(x+y+z) = g(x+y) + g(z)$ d'où l'additivité de g .

Soit $a \in \mathbb{K}, x \neq 0$, on a O, x et ax alignés donc $O', g(x)$ et $g(ax)$ le sont aussi. Donc $g(ax) = s(a, x)g(x)$ pour $s(a, x) \in \mathbb{K}'$. Pour x et y linéairement indépendants, en calculant $f(a(x+y))$ on constate que $s(a, x) = s(a, y) = s(a, x+y)$. En introduisant comme précédemment un vecteur z linéairement indépendant de x dans le cas où y est sur (Ox) on obtient le même résultat et $s(a, x)$ ne dépend pas de x , on note alors $s(a)$.

Les propriétés de morphisme se vérifient aisément, l'injectivité réside dans le fait qu'on travaille sur des corps et la surjectivité du fait que pour x (et donc $f(x)$) non nul, $f(\mathbb{K}x) = \mathbb{K}'f(x)$, on a donc un isomorphisme de corps. □

NB : La réciproque est évidemment vraie.

Corollaire. *Toute bijection d'un espace projectif de dimension supérieure à 2 dans lui même qui conserve l'alignement est composée d'un automorphisme du corps de base et d'une homographie.*

Corollaire. *Si le corps de base est \mathbb{R}, \mathbb{Q} ou \mathbb{F}_p pour p premier alors une bijection d'un espace projectif de dimension ≥ 2 dans lui même conserve l'alignement ssi c'est une homographie.*

1.4 Droite projective et birapport

On se place sur $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$. Il s'agit de l'ensemble \mathbb{K} muni d'un point à l'infini. On identifie $k \in \mathbb{K}$ avec le point de coordonnées homogènes $(k, 1)$ et le point à l'infini avec $(1, 0)$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on est sur le cercle.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ on est sur la sphère de Riemann. Dans ces deux premiers cas on obtient le compactifié d'Alexandrov du corps.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ on est dans un ensemble à $q + 1$ éléments.

Définition. On appelle abscisse projective d'un point de la droite projective (x,y) l'élément $\frac{x}{y}$ si $y \neq 0$ (on a alors un élément de \mathbb{K} et ∞ sinon. On note $\hat{\mathbb{K}}$ l'ensemble des abscisses projectives, il est en bijection canonique avec $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$.

Propriété. L'action de $GL(2, \mathbb{K})$ sur la droite projective est :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

Avec les conventions $x/0 = \infty$, $\infty + x = \infty$, $x/\infty = 0$ et si c est non nul, $\frac{a\infty+b}{c\infty+d} = \frac{a}{c}$

Démonstration. L'action transforme les coordonnées homogènes (x, y) en $(ax + by, cx + dy)$ d'où le résultat et les conventions utilisées. \square

On rappelle qu'une homographie d'un espace projectif de dimension n est entièrement déterminée par l'image de $n + 2$ points projectivement indépendants.

Définition. Soient $a, b, c, d \in D$ une droite projective. le birapport $[a, b, c, d]$ est la quantité $h(d)$ où h est l'unique homographie de D sur $\hat{\mathbb{K}}$ qui envoie a sur ∞ , b sur 0 et c sur 1 .

Proposition. Soient D, D' deux droites projectives. a, b, c, d sur D et a', b', c', d' sur D' . Alors il existe une homographie de D dans D' envoyant a sur a' , b sur b' , c sur c' et d sur d' ssi $[a, b, c, d] = [a', b', c', d']$.

Démonstration. Supposons qu'on ait une telle application u . Soit h l'unique homographie envoyant a, b, c sur $\infty, 0, 1$ et h' qui fait de même avec a', b', c' . Alors par unicité on a $h' \circ u = h$ d'où $u(d) = d'$.

Réciproquement, si les birapports sont égaux, $h'^{-1} \circ h$ convient car $h(d) = h'(d')$. \square

Corollaire. Le birapport est invariant par homographie.

Proposition. Si a, b, c et d sont distincts alors :

$$[a, b, c, d] = \frac{c - a}{c - b} \cdot \frac{d - b}{d - a}$$

Démonstration. Soit h l'unique homographie envoyant a, b, c sur $\infty, 0, 1$. Elle a b pour zéro et a pour pôle, elle s'écrit donc $h: t \mapsto \alpha \frac{t-b}{t-a}$ la condition $h(c) = 1$ détermine α et donc la formule. \square

Corollaire. Le birapport de 4 points a, b, c, d est fonction homographique de a, b, c, d .

Propriété. \mathfrak{S}_4 agit sur l'ensemble des birapports de 4 points a, b, c, d par permutation des points et admet 6 valeurs distinctes : $r, 1 - r, \frac{1}{r}, 1 - \frac{1}{r}, \frac{1}{1-r}, \frac{1}{1-\frac{1}{r}}$.

La notion de birapport s'étend alors pour 4 points alignés dans un espace vectoriel en les considérant sur une même droite projective (indépendamment de l'identification, le birapport étant invariant par homographie).

On peut aussi l'étendre à un faisceau de 4 droites coplanaires distinctes car elles définissent alors 4 points distincts d'une droite projective après passage au quotient.

On pourrait définir le birapport de 4 droites de manière équivalente (cela revient à la première construction du birapport et au passage au quotient) de la manière suivante :

Définition. Soient d_1, d_2, d_3, d_4 des droites distinctes de V concourantes en un point O . On pose $\Delta = \{1\} \times \mathbb{K}$. Soit $f : V \mapsto \mathbb{K}^2$ l'unique morphisme tel que :

$$-f(d_1) = \mathbb{K} \times \{0\}$$

$$-f(d_2) = \{0\} \times \mathbb{K}$$

$$-f(d_3) \cap \Delta = (1, 1)$$

Alors on définit le birapport des droites comme étant

$$[d_1, d_2, d_3, d_4] := f(d_4) \cap \Delta$$

Proposition. Soient 4 droites d_i concourantes en un point O et soit D une droite intersectant les 4 premières en des points distincts x_i .

Alors le birapport $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ ne dépend pas du choix de D et est toujours égal à $[d_1, d_2, d_3, d_4]$.

Démonstration. On se donne deux droites D et D' et leurs points d'intersection avec les 4 droites respectivement les x_i et x'_i .

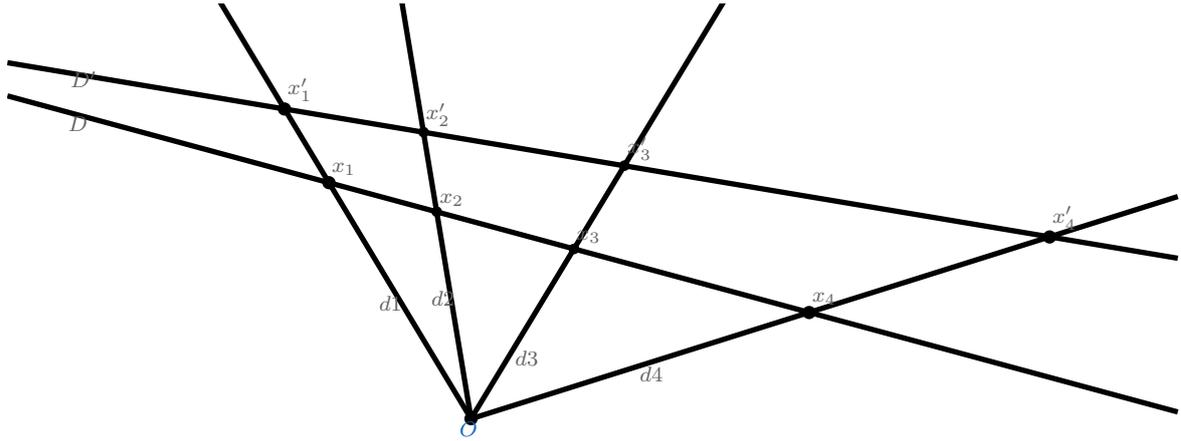
1er cas : D et D' sont parallèles. La proposition se déduit alors simplement du théorème de Thalès qui donne aux rapports $\frac{x_i - x_j}{x'_i - x'_j}$ la même valeur.

2ème cas : Les deux droites ne sont plus parallèles et se coupent donc en un point M . Quitte à translater D' (ce qu'on peut faire sans changer le birapport d'après le premier cas) on peut supposer $M \in d_1$ i.e. $M = x_1 = x'_1$. Les parallèles à d_1 issues de x_3 (resp. x'_3) coupent respectivement d_2 et d_4 en y_2, y_4 (resp. y'_2, y'_4).

Le théorème de Thalès donne

$$\frac{\overline{Ox_1}}{\overline{x_3y_2}} = \frac{\overline{x_2x_1}}{\overline{x_2x_3}} \text{ et } \frac{\overline{Ox_1}}{\overline{x_3y_4}} = \frac{\overline{x_4x_1}}{\overline{x_4x_3}}$$

En notant $r = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ on a alors $\overline{x_3y_2} = K\overline{x_3y_4}$ En appliquant de nouveau le théorème de Thalès et en utilisant cette dernière relation on trouve $\overline{x'_3y'_2} = K\overline{x'_3y'_4}$ et en reprenant les deux premières égalités avec les x'_i on obtient l'égalité des birapports. \square



Propriété. Soient a, b, c, d, e des points alignés (ou 5 droites concourantes en un même point). Alors

$$[a, b, c, d][a, b, d, e] = [a, b, c, e]$$

Démonstration. Il suffit de développer la première expression et on trouve le résultat après simplification. \square

2 Variétés finslériennes, riemanniennes

On se donne M une variété différentielle qu'on supposera connexe.

Définition. Une métrique finslérienne sur M est une fonction $F: TM \mapsto \mathbb{R}$ telle que pour $m \in M$:

- $F(m, \cdot)$ est positive

- $\forall v \in T_m(M), F(m, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

- $\forall v \in T_m(M), \forall t > 0, F(m, tv) = tF(m, v)$

- $\forall v, w \in T_m(M), F(m, v + w) \leq F(m, v) + F(m, w)$

Si de plus $\forall m \in T_m(M) F(m, \cdot) = F(m, -\cdot)$, i.e. $F(m, \cdot)$ est une norme sur $T_m(M)$, on dit que la métrique est réversible.

Une variété munie d'une métrique finslérienne \mathcal{C}^k est une variété finslérienne \mathcal{C}^k .

Définition. Si on a une métrique finslérienne réversible et associée à un produit scalaire sur chaque espace tangent on parle de métrique et de variété riemannienne.

Une variété riemannienne revient à se donner une matrice symétrique définie positive en chaque point avec la régularité voulue par rapport à ce point.

Définition. Soit (M, F) une variété finslérienne $\gamma \in \mathcal{C}_m^1([a, b], M)$, on définit la longueur de γ par :

$$L(\gamma) := \int_a^b F(\gamma(t), \gamma'(t)) dt$$

Définition. On appelle distance finslérienne (riemannienne si métrique riemannienne) de (M, F) la fonction :

$$d(p, q) := \inf_{\substack{\gamma \in C_m^1([0,1], M) \\ \gamma(a)=p \\ \gamma(b)=q}} L(\gamma)$$

La longueur est invariante par reparamétrisation croissante, c'est pourquoi on peut se restreindre aux courbes définies sur $[0, 1]$.

Proposition. La fonction d est une quasimétrique (il lui manque juste la symétrie pour être une distance). C'est une distance si la métrique de base est réversible.

Démonstration. L'inégalité triangulaire vient de la relation de Chasles et de la positivité de la métrique finslérienne.

La distance est clairement positive.

Si la métrique est réversible, la longueur est invariante par reparamétrisation et on peut parcourir un chemin dans l'autre sens pour aller de q à p et ainsi d est symétrique.

Soient $p \neq q$. Montrons que $d(p, q) > 0$. Soit γ reliant p à q . Soit $\psi : B(0, 2) \mapsto U$ des coordonnées locales en p , où U ne contient pas q . F est continue sur $\psi(B(\bar{0}, 1)) \times S_n(\mathbb{R})$ donc il existe $m, M > 0$ tels que $\forall x \in B(0, 1), m\|\cdot\| \leq F(\psi(x), \cdot) \leq M\|\cdot\|$. On en déduit en posant $\epsilon = \inf\{s/\gamma(s) \in \psi(\partial B(0, 1))\}$, que :

$$L(\gamma) \geq \int_0^\epsilon F(\gamma(t), \gamma'(t)) dt \geq L(\gamma \cap \psi(B(0, 1))) \geq m$$

Donc $L(\gamma) \geq m$ pour toute courbe donc $d(p, q) \geq m > 0$. □

Proposition. Un arc de p à q est un arc géodésique pour la distance finslérienne ssi il minimise la fonctionnelle L .

Démonstration. Cela découle des définitions et du fait que d soit une distance (on peut alors parler de géodésique). □

3 Géométrie de Klein

3.1 Quadriques

Définition. Une quadrique est une hypersurface d'un espace affine définie comme le lieu d'annulation d'un polynôme de degré 2. En dimension 2 on parle de conique.

Une quadrique de \mathbb{R}^n peut donc être représentée par une matrice $A \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$, d'un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ et d'un élément $c \in \mathbb{R}$ par :

$$\langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c = 0$$

Définition. On dit que la quadrique est non dégénérée si, en passant en projectif, la forme quadratique associée est non dégénérée.

Supposons la quadrique non dégénérée. On diagonalise A et l'équation devient :

$$\sum_i a_i x_i^2 + \sum_i b_i x_i + c = 0$$

On translate maintenant notre repère en rajoutant $-\frac{b_i}{a_i}$ à la i -me coordonnée, on obtient alors :

$$\sum_i a_i x_i^2 + c' = 0$$

En passant le c' de l'autre coté et divisant par cette même quantité (possible car on a une quadrique non dégénérée), on obtient après dilatation des vecteurs de base :

$$\sum_i \pm x_i^2 = 1$$

En fait on peut donner une preuve plus générale en diagonalisant la matrice symétrique associée au polynôme homogénéisé :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline \bar{b} & c \end{array} \right)$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème. *Toute conique, vue dans l'espace projectif peut s'écrire sous la forme :*

$$\sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i x_i^2 = 0$$

où $(x_{n+1} = 1)$ correspond à l'espace affine de départ et $\forall i, \epsilon_i \in \{-1; 0; 1\}$.

3.2 Construction de Klein

On se place dans \mathbb{RP}^n et on fixe une quadrique (que Klein appelle la quadrique fondamentale et Cayley l'absolu). On prend deux points du plan projectif, la droite passant par ces deux points intersecte l'absolu en deux points ou en un seul point double (éventuellement dans \mathbb{CP}^n).

On veut construire une distance entre ces points. On veut que cette distance soit :

-additive pour les triplets de points alignés

-invariante par les transformations projectives préservant l'absolu

Les transformations préservant l'absolu ont 1 ou 2 points fixes (car ils sont solution d'une équation de degré 2) et on se place dans le cas où il y en a 2.

On a donc une droite projective et on s'intéresse à une transformation du type $z \mapsto \lambda z, \lambda > 0$. Cette transformation a deux points fixes : 0 et ∞ . On part d'un point z_1 de la droite et on décide que le point $\lambda^n z_1$ est à distance $n \in \mathbb{Z}$. On peut alors construire les points à distance rationnelle et par continuité on a la distance entre n'importe quels points, i.e. la distance entre z et z_1 est $\frac{1}{\log(\lambda)} \log(\frac{z}{z_1})$. On notera $c = \frac{1}{\log(\lambda)}$ et on remarque que la distance se réécrit en

$$c \log([\infty, 0, z_1, z])$$

On donne ensuite un résultat général où 0 et l'infini sont remplacés par deux points d'une quadrique de dimension 1 (l'absolu).

Proposition. *Les deux points fondamentaux sont ici solution d'une équation homogène de degré 2 $\Omega(z_1, z_2) = az_1^2 + 2bz_1z_2 + cz_2^2 = 0$. On note r et s les deux solutions complexes projectives. Les points considérés ont alors pour coordonnées homogènes $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$. Alors en notant Ω_\cdot la forme bilinéaire symétrique de \mathbb{R}^2 associé à la forme quadratique Ω :*

$$d(x, y) = c \log\left(\frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}\right)$$

Démonstration. Il faut montrer que le birapport $[s, r, x, y]$ est égal au quotient des racines du polynôme $\tilde{\Omega}(X, Y) = \Omega_{xx}X^2 - 2\Omega_{xy}XY + \Omega_{yy}Y^2$. Pour cela, on utilise $[s, r, x, y] = [x, y, s, r]$. On prend ensuite une transformation projective F qui envoie x sur l'infini et y sur 0, alors $[x, y, s, r] = \frac{F(r)}{F(s)}$. On a alors $F(r)$ et $F(s)$ qui sont racines de $F^*\Omega = \tilde{\Omega}$. \square

Corollaire. On peut réécrire la distance comme :

$$d(x, y) = 2ic \arccos \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

Démonstration. Ce résultat découle de l'identité : $\log(a) = 2i \arccos \frac{a+1}{2\sqrt{a}}$ et d'un calcul rapide. \square

On peut faire les mêmes preuves en dimension n et obtenir les mêmes résultats, $\Omega_{a,b}$ correspondra alors à la forme bilinéaire symétrique de \mathbb{R}^{n+1} associée à $\tilde{\Omega}$.

Définition. Soient u, v deux droites se coupant en un point p (toujours vrai si elles sont coplanaires, éventuellement en dehors de la quadrique). Soient u', v' les droites issues de p dans le même plan et qui sont tangentes à la quadrique (elles sont solution d'une équation de degré 2), les droites étant dans l'ordre u', u, v, v' . On définit l'angle entre u et v par :

$$c' \log([u', u, v, v'])$$

où la constante c' est choisie pour avoir un résultat réel.

Propriété. Les formules pour les angles sont les mêmes que pour la distance en prenant des coordonnées homogènes.

Propriété. De par la construction donnée, les géodésiques sont les cordes de la quadrique.

Théorème. La courbure de Gauss d'un domaine délimité par une conique muni de la distance de Klein avec une constante c est constante égale à $\frac{-1}{4c^2}$.

3.3 Points d'intersection imaginaires et métrique sphérique

On se place dans le cas où l'absolu est imaginaire. On peut alors définir une distance sur tout le plan projectif réel. Les points d'intersection avec la conique seront ici complexes conjugués. On prend $\Omega(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ (n'importe quel polynôme de degré 2 de signature $(+, +, +)$ convient car ils sont projectivement équivalents et le birapport est conservé par l'action de $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$). $\Omega_{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3z_3$, $\Omega_{xx} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. On a alors :

$$d(x, y) = 2ic \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

On retrouve la distance sphérique en prenant une bonne constante. On veut un réel positif et que la distance maximale entre deux points soit égale à $\frac{\pi}{2}p$ donc on prend $c = -\frac{i}{2}$. On trouve alors une sphère de courbure constante égale à 1.

Le théorème de Gauss-Bonnet donne que pour un triangle géodésique d'angles α, β, γ et d'aire A , on a

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + A$$

En particulier la somme des angles d'un triangle est toujours supérieure à π . En prenant par exemple un quart de sphère supérieure, on obtient un triangle avec trois angles droits.

NB : On aurait pu prendre une autre constante pour c en la multipliant par un réel positif (il faut garder une distance). On obtient toujours un espace de courbure positive constante où la somme des angles d'un triangle est toujours inférieure à 2π . Cela correspondrait à prendre une métrique sphérique sur une sphère de rayon différent de 1.

Ce modèle se généralise en dimension n , avec la même normalisation.

3.4 Points d'intersection réels et modèle hyperbolique de Klein-Beltrami

L'absolu est maintenant réel. On va prendre $\Omega(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ce qui donne

$$d(x, y) = 2ic \arccos \frac{x \circ y}{\|x\| \|y\|} = 2c \operatorname{arccosh} \frac{x \circ y}{\|x\| \|y\|}$$

où $x \circ y = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$ et $\|x\|^2 = x \circ x$.

On retrouve la distance hyperbolique. On appelle ce modèle celui de Klein-Beltrami ou du disque de Klein. Il correspond à la projection de \mathbb{H}^2 sur le plan $x_3 = 1$, on obtient alors l'intérieur du cercle et le bord correspond aux points à l'infini. Les droites hyperboliques sont envoyées sur les cordes du cercle. On peut alors voir qu'une droite possède une infinité de parallèles passant par un même point.

Cette représentation de l'espace hyperbolique est non conforme i.e. elle ne préserve pas les angles. Si on regarde les angles d'un triangle géodésique où les droites se coupent à l'infini, ils sont tous nuls (les droites se coupent sur la conique donc on n'a qu'une tangente).

La courbure de Gauss est constante égale à 1, en particulier le théorème de Gauss-Bonnet nous donne cette fois que la somme des angles d'un triangle géodésique est inférieure à π , comme on le retrouve dans l'exemple précédent.

NB : Là encore on aurait pu prendre une autre constante pour obtenir une courbure positive κ cela correspondrait au modèle hyperbolique dans l'espace de Lorentz avec la quadrique $\|x\|^2 = -\kappa$.

Ce modèle se généralise en dimension n avec la même normalisation.

4 Géométries de Hilbert

4.1 Métriques de Funk et Hilbert

On désignera dans la suite par Ω un domaine ouvert convexe propre de \mathbb{R}^n . On désignera par H l'hyperplan à l'infini dans $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ et par $\tilde{\Omega}$ l'adhérence de Ω dans $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ et par $\tilde{\partial}\Omega$ sa frontière dans ce même espace. On a bien sur $\partial\Omega = \tilde{\partial}\Omega \setminus H$.

4.1.1 Métrique de Hilbert

Définition. Soient $x, y \in \Omega$. La droite (xy) coupe $\tilde{\partial}\Omega$ en deux points α, ω et α, x, y, ω sont alignés dans cet ordre. On définit alors la distance de Hilbert par :

$$d_k(x, y) := \frac{1}{2\sqrt{k}} \log([\omega, \alpha, x, y])$$

si $x = y$, on prend n'importe quelle droite passant par ce point, le birapport fait 1 et donc la distance est nulle. k est un réel positif influant sur la courbure que l'on prendra dans la suite égal à 1, cela n'influe pas sur les résultats, on notera donc $d = d_1$.

Proposition. *On a les propriétés suivantes :*

- $d(x, y) \geq 0$
- d est symétrique
- d vérifie l'inégalité triangulaire
- le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire survient quand le point de transition est sur le segment formé par les deux autres
- d est non bornée
- d est séparante ssi Ω ne contient aucune droite affine.

Démonstration. La positivité découle de l'ordre des points, la symétrie du fait qu'inverser x et y renverse les rôles de α, ω et ainsi le birapport est conservé.

On prend une corde du domaine et x sur cette corde. On prend y sur cette corde et on le fait tendre vers le bord du domaine, on a alors $\lim d(x, y) = \infty$.

Supposons que Ω contient une droite. On prend x, y distincts sur cette droite. Les points α, ω sont alors à l'infini et le birapport vaut 1 donc la distance est nulle donc non séparante. Réciproquement, si le domaine ne contient aucune droite, le birapport de deux points x, y est soit avec des points dans $\partial\Omega$ auquel cas la distance est non nulle (le birapport est strictement supérieur à 1) ; sinon, l'un des points est à l'infini et alors en considérant le point d'intersection à distance finie comme le zéro de la droite, on constate que la distance est strictement positive.

Montrons à présent l'inégalité triangulaire. Si $z \in [x, y]$ on a bien l'égalité $d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$ par la relation de Chasles du birapport et l'inégalité si z est en dehors du segment mais sur la droite.

On va maintenant supposer qu'on a x, y, z non alignés. On peut alors se placer dans le plan les contenant tous les trois et se restreindre ainsi à la dimension 2 (l'intersection d'un convexe avec un plan est un convexe). On pose $x_+, x_-, y_+, y_-, u_+, u_-$ les points d'intersection respectifs des droites $(xz), (yz)$ et (yx) avec le bord du domaine. Les droites $(x_+y_-), (y_+x_-)$ se coupent en un point O et coupent respectivement la droite (u_+u_-) en w_-, w_+ . Enfin soit z' l'intersection de (Oz) et de (xy) . On obtient la figure ci-dessous.

L'invariance du birapport par projection centrale donne :

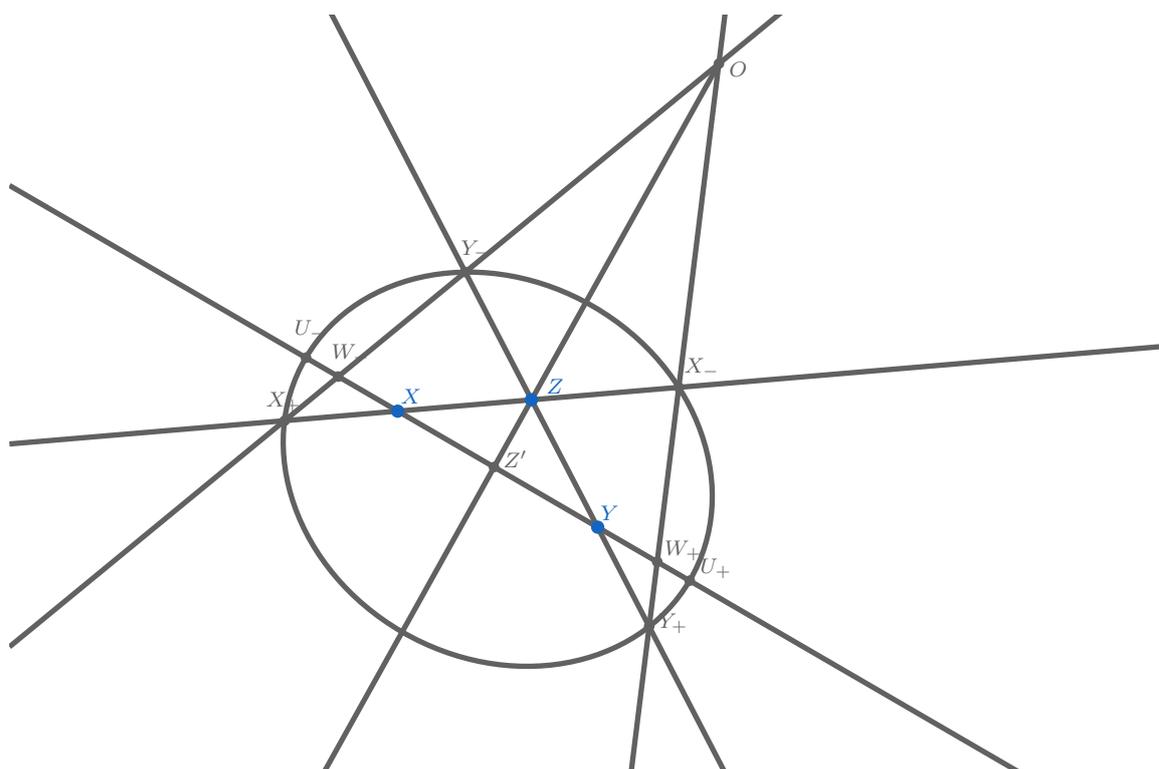
$$[x_-, x_+, x, z] = [w_+, w_-, x, z'] = [u_+, u_-, x, z'] \cdot [u_-, w_-, x, z'] \cdot [w_+, u_+, x, z']$$

$$[y_-, y_+, y, z] = [w_-, w_+, y, z'] = [w_+, w_-, y, z']^{-1} = ([u_+, u_-, y, z'] \cdot [u_-, w_-, y, z'] \cdot [w_+, u_+, y, z'])^{-1}$$

On en déduit

$$d(x, z) + d(z, y) \leq d(x, z') + d(z', y) \leq d(x, y)$$

On en déduit l'inégalité triangulaire. L'égalité ne se produit que quand $w_- = u_-, w_+ = u_+$, i.e. quand les points sont alignés. \square



Corollaire. *Si le domaine Ω ne contient aucune droite, d est une distance sur Ω .*

NB : Dans le cas où Ω est l'intérieur d'une conique (ellipse pour avoir la convexité) on retrouve la construction de Klein.

4.1.2 Métrique de Funk

Définition. Soient $x, y \in \Omega$. La demi-droite $[xy]$ coupe $\tilde{\delta}\Omega$ en un point ω . On pose alors :

$$F(x, y) = \log\left(\frac{|x - \omega|}{|y - \omega|}\right)$$

Si $x = y$, n'importe quel rayon donne $F(x, x) = 0$.

Propriété. *La distance de Hilbert est le symétrisé de la distance de Funk :*

$$d(x, y) = \frac{1}{2}(F(x, y) + F(y, x))$$

On retrouve d'ailleurs des propriétés similaires à la distance de Hilbert.

Proposition. *On a les propriétés suivantes :*

- $F(x, y) \geq 0$
- F vérifie l'inégalité triangulaire
- le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire survient quand le point de transition est sur le segment formé par les deux autres
- F est non bornée
- F est séparante ssi Ω est borné.

Démonstration. La positivité découle $y \in [x, \omega]$.

F est non borné pour les mêmes raisons que pour Hilbert : on fixe x et une direction, on prend y dans cette direction qu'on fait tendre vers le bord de Ω , la distance tend vers l'infini.

Le fait d'être borné équivaut, par convexité, au fait de ne contenir aucune demi-droite, la preuve de la séparation est alors la même que pour la distance de Hilbert.

Pour l'inégalité triangulaire, le cas où les points sont alignés est encore évident. Soient x, y, z non alignés, on se restreint à la dimension 2 et on reprend les constructions des droites et points décrites dans la preuve de l'inégalité triangulaire pour la distance de Hilbert. On rappelle alors que l'invariance par projection centrale depuis O donne :

$$[x_-, x_+, x, z] = [w_+, w_-, x, z'], [y_-, y_+, y, z] = [w_-, w_+, y, z']$$

En multipliant les deux cotés on obtient :

$$\frac{|x - x_-| |z - y_+|}{|z - x_-| |y - y_+|} = \frac{|x - w_+| |y - w_-| |x - x_+| |z - y_-|}{|y - w_+| |x - w_-| |z - x_+| |y - y_-|}$$

Or les points x_+, w_-, y_- sont alignés et sur les trois cotés du triangle xyz donc par le théorème de Ménélaüs :

$$\frac{|y - w_-| |x - x_+| |z - y_-|}{x - w_- |z - x_+| |y - y_-|} = 1$$

On en déduit :

$$\frac{|x - x_-| |z - y_+|}{|z - x_-| |y - y_+|} = \frac{|x - w_+|}{|y - w_+|}$$

Il ne reste qu'à montrer que la quantité obtenue est plus grande que celle obtenue en remplaçant w_+ par u_+ . i.e.on s'intéresse à $[x, y, w_+, u_+]$ et on sait que $[u_+, x, y, w_+] > 1$ et

$$\begin{aligned}
[x, y, w_+, u_+] &= (1\ 4\ 3\ 2) \cdot [u_+, x, y, w_+] \\
&= (3\ 4)(2\ 3)(1\ 2) \cdot [u_+, x, y, w_+] \\
&= (3\ 4)(2\ 3) \cdot [u_+, x, y, w_+]^{-1} \\
&= (1\ 2)(1\ 2)(3\ 4) \cdot 1 - [u_+, x, y, w_+]^{-1} \\
&= (1\ 2) \cdot (1 - [u_+, x, y, w_+]^{-1}) \\
&= \frac{1}{1 - [u_+, x, y, w_+]^{-1}} > 1
\end{aligned}$$

avec égalité ssi $w_+ = u_+$ i.e.les trois points sont alignés. D'où :

$$\frac{|x - x_-| |z - y_+|}{|z - x_-| |y - y_+|} = \frac{|x - u_+|}{|y - u_+|}$$

En passant au log on obtient l'inégalité triangulaire avec le cas d'égalité ssi les trois points sont alignés. \square

4.2 Structure finslérienne

On se donne la métrique de Funk sur Ω , on va donner à Ω une structure de variété finslérienne (et ainsi justifier l'appellation de "métrique", généralement plus employée dans ce genre de contexte).

Proposition. Soit $p \in \Omega$, $v \in \mathbb{R}^n$. On pose ω l'intersection de la frontière de Ω avec le rayon issu de p et de direction v . Alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}(F(p, p + tv))|_{t=0^+} = \frac{|v|}{|p - \omega|}$$

Démonstration. Notons que ω ne change pas quand on fait varier $t > 0$.

Si ω est à l'infini, la métrique de Funk est constante nulle le long du rayon donc la dérivée est nulle ce qui coïncide avec la formule. On suppose à présent que $\omega \in \partial\Omega$.

On garde quand même $p \neq \omega$, de plus $p - \omega$ et v sont colinéaires et de sens opposé. On en déduit :

$$\begin{aligned}
F(p, p + tv) &= \log \frac{|p - \omega|}{|p - \omega + tv|} \\
&= \log\left(\frac{|p - \omega|}{|p - \omega| + t \frac{\langle p - \omega, v \rangle}{|p - \omega|} + o(t)}\right) \\
&= \log \frac{1}{1 + t \frac{\langle p - \omega, v \rangle}{|p - \omega|^2} + o(t)} \\
&= \log\left(1 - \frac{t \langle p - \omega, v \rangle}{|p - \omega|^2} + o(t)\right) \\
&= -\frac{t \langle p - \omega, v \rangle}{|p - \omega|^2} + o(t) \\
F(p, p + tv) &= t \frac{|v|}{|p - \omega|} + o(t)
\end{aligned}$$

\square

Définition. On munit l'espace tangent à Ω en p de la norme :

$$\|v\|_{p,F} := \frac{|v|}{|p - \omega(p, v)|}$$

Théorème. Si Ω est borné alors $(p, v) \mapsto \|v\|_{p,F}$ est une métrique finslérienne sur Ω .

Démonstration. Puisque Ω est borné, on ne peut pas avoir de ω à l'infini donc la norme obtenue est séparante. Les autres propriétés découlent directement de celles de la métrique de Funk. \square

NB : la métrique finslérienne obtenue n'est pas forcément symétrique, en effet, on a en général pas $\omega(p, v) = \omega(p, -v)$ ni même égalité de leur distance à p .

Proposition. Soit $p \in \Omega$, $v \in \mathbb{R}^n$. On pose α, ω les intersections de la frontière de Ω avec la droite de vecteur directeur d passant par p de sorte que $\alpha, p, p + tv, \omega$ soient alignés dans cet ordre pour $t > 0$. Alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}(d(p, p + tv))|_{t=0^+} = |v| \cdot \left(\frac{1}{|p - \omega|} + \frac{1}{|p - \alpha|} \right)$$

Démonstration. Similaire au cas de Funk, on ne peut pas utiliser directement le fait que la distance de Hilbert soit la symétrisée de celle de Funk car on n'a pas calculé de dérivée par rapport au premier membre, néanmoins le raisonnement serait similaire. \square

Définition. On munit l'espace tangent à Ω en p de la norme :

$$\|v\|_{p,H} := |v| \cdot \left(\frac{1}{|p - \omega|} + \frac{1}{|p - \alpha|} \right)$$

Théorème. Si Ω ne contient aucune droite alors $(p, v) \mapsto \|v\|_{p,H}$ définit une métrique finslérienne réversible sur Ω

Démonstration. Puisque le domaine ne contient aucune droite, les normes sont bien séparantes. Le reste se déduit des propriétés de d . \square

Propriété. On se place dans le cas où $\Omega = \{x / \langle x, \nu \rangle < \tau\}$ pour un certain $\nu \in \mathbb{R}^n$ et $\tau \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\|\xi\|_{x,F} = \max\left\{0, \frac{\langle \xi, \nu \rangle}{\tau - \langle x, \nu \rangle}\right\}$$

Démonstration. On fixe x et ξ , on cherche $t > 0$ tel que $\omega = x + t\xi \in \tilde{\partial}\Omega$.

$$\begin{aligned} \langle x + t\xi, \nu \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle x, \nu \rangle + t \langle \xi, \nu \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{\tau - \langle x, \nu \rangle}{\langle \xi, \nu \rangle} \end{aligned}$$

Or on veut avoir $t > 0$, ce qui impose la condition $\langle \xi, \nu \rangle < 0$, sinon on prend $t = \infty$. On a alors :

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{x,F} &= |\xi| \frac{\langle \xi, \nu \rangle}{(\tau - \langle x, \nu \rangle)|\xi|} \text{ si } t > 0 \\ &= \frac{\langle \xi, \nu \rangle}{\tau - \langle x, \nu \rangle} \text{ si } t > 0 \\ &= \max\left\{0, \frac{\langle \xi, \nu \rangle}{\tau - \langle x, \nu \rangle}\right\} \end{aligned}$$

\square

4.3 Géodésiques

On a une structure finslérienne associée à notre métrique de Funk ou Hilbert sur le domaine. On va en fait montrer que cette structure de variété permet de retrouver la métrique. On note ℓ_F la distance géodésique associée à la structure finslérienne dans le cas de la métrique de Funk et ℓ_H dans le cas de la métrique de Hilbert.

Lemme. Soient Ω_1, Ω_2 deux domaines convexes. On note $f_i : T\Omega_i \mapsto \mathbb{R}^+$ qui à x, ξ associe le réel positif (éventuellement infini) t tel que $x + t\xi \in \tilde{\partial}\Omega_i$. Alors :

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \Leftrightarrow \forall(x, \xi), f_1(x, \xi) \leq f_2(x, \xi)$$

Démonstration. $f_i(x, \xi) = \sup\{t > 0, \xi \in \frac{1}{t}(\Omega_i - x)\}$ d'où l'équivalence. \square

Théorème.

$$\ell_F = F \text{ et } \ell_H = d$$

Démonstration. Il suffit de le prouver dans le cas de la métrique de Funk, on aura alors le résultat pour Hilbert par symétrisation.

1er cas : On va prouver le résultat dans le cas où $\Omega = \{x/ \langle x, \nu \rangle < \tau\}$. Soit $\alpha : [0, 1] \mapsto \Omega$ un arc allant d'un point p à q . On a alors :

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_0^1 \max\left\{0, \frac{\langle \nu, \dot{\alpha}(t) \rangle}{\tau - \langle \alpha(t), \nu \rangle}\right\} dt \\ &= \int_0^1 \max\left\{0, \frac{(\tau - \langle \nu, \alpha(t) \rangle)'}{\tau - \langle \nu, \alpha(t) \rangle}\right\} dt \\ &\geq \max\left\{0, \log\left(\frac{\tau - \langle \nu, p \rangle}{\tau - \langle \nu, q \rangle}\right)\right\} \end{aligned}$$

avec égalité ssi $\langle \nu, \dot{\alpha}(t) \rangle >$ est de signe constant presque partout. On a donc $\ell_F(p, q) = \max\left\{0, \log\left(\frac{\tau - \langle \nu, p \rangle}{\tau - \langle \nu, q \rangle}\right)\right\}$.

Or, soit ω le point d'intersection du rayon issu de p passant par q et de la frontière $\partial\Omega$ (en supposant qu'il existe). On a $\langle \nu, \omega \rangle = \tau$ donc $\tau - \langle \nu, p \rangle = \langle \nu, \omega - p \rangle = |\omega - p| \langle \nu, \frac{\omega - p}{|\omega - p|} \rangle$.

De même, $\tau - \langle \nu, q \rangle = \langle \nu, \omega - q \rangle = |\omega - q| \langle \nu, \frac{\omega - q}{|\omega - q|} \rangle$. Or par l'alignement p, q, ω , on a

$$\frac{|\omega - p|}{|\omega - q|} = \frac{\omega - q}{\omega - p}.$$

La distance devient alors :

$$\ell(p, q) = \max\left\{0, \log\left(\frac{|p - \omega|}{|q - \omega|}\right)\right\} = F(p, q)$$

2ème cas : Ω est un domaine convexe quelconque. On prend alors p, q dans le domaine et ω comme d'habitude. Soit $\alpha : t \mapsto p + t\xi$ où $\xi = \frac{q-p}{|q-p|}$. Calculons la longueur de α . Pour tout t ,

$\omega(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) = \omega$ et on a $f(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) = f(p + t\xi, \xi) = \frac{1}{1 - \frac{|\omega - p|}{|q - p|}t} = \frac{1}{|\omega - p| - t}$. Notons que cette quantité est toujours strictement positive. On a alors :

$$L(\alpha) = \int_0^{|q-p|} \frac{dt}{|\omega - p| - t} = \log\left(\frac{|\omega - p|}{|\omega - p| - |q - p|}\right) = \log\left(\frac{|\omega - p|}{|\omega - q|}\right)$$

On en déduit $\ell_F(p, q) \leq F(p, q)$.

On prend un hyperplan supportant Ω en ω i.e. un hyperplan passant par ω et tel que Ω soit contenu dans un demi-espace \mathcal{H} délimité par cet hyperplan. Le lemme et l'inclusion des domaines donne $\ell_F(p, q) \geq \ell_{F, \mathcal{H}}(p, q) = \log\left(\frac{|\omega - p|}{|\omega - q|}\right) = F(p, q)$. D'où l'égalité. \square

Corollaire. *Les géodésiques de Ω sont les segments euclidiens. Les droites géodésiques sont donc les cordes du domaine.*

Propriété. *La géodésique issue de p et de direction ξ paramétrée par une vitesse constante égale à 1 pour la métrique de Funk a pour équation :*

$$\alpha_{p,\xi}: t \mapsto p + f(p, \xi)(1 - e^{-t})\xi$$

Démonstration. On a $\omega - p = f(p, \xi) \cdot \xi$ et $\omega - \alpha(t) = e^{-t}f(p, \xi)\xi$. On en déduit $F(p, \alpha(t)) = \log e^s = s$, puis par l'alignement des points que si $s < t$, $F(\alpha(s), \alpha(t)) = F(p, \alpha(t)) - F(p, \alpha(s)) = t - s$ donc α paramètre une géodésique. De plus :

$$\begin{aligned} \|\dot{\alpha}(t)\|_{F,\alpha(t)} &= e^{-s}f(p, \xi)|\xi| \frac{1}{|\alpha(t) - \omega|} \\ &= e^{-s}f(p, \xi)|\xi| \frac{1}{|\alpha(t) - p - f(p, \xi)\xi|} \\ &= e^{-s}f(p, \xi)|\xi| \frac{1}{|e^{-s}f(p, \xi)\xi|} \\ \|\dot{\alpha}(t)\|_{F,\alpha(t)} &= 1 \end{aligned}$$

Donc la vitesse est constante égale à 1. (on pouvait obtenir ce résultat directement à partir de l'égalité $F(\alpha(t), \alpha(s)) = s - t$ et en dérivant par rapport à s en t , par dérivation composée on obtient le résultat). \square

Propriété. *La géodésique issue de p et de direction ξ paramétrée par une vitesse constante égale à 1 pour la métrique de Hilbert a pour équation :*

$$\alpha_{p,\xi}(t) = p + \frac{e^s - e^{-s}}{\frac{e^s}{f(p,\xi)} + \frac{e^{-s}}{f(p,-\xi)}}\xi$$

Démonstration. $d(p, \alpha(s)) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{|p-\omega|}{|\alpha(s)-\omega|} \cdot \frac{|\alpha(s)-\alpha|}{|p-\alpha|} \right)$

Or $\omega = p + f(p, \xi)\xi$ et $\alpha = p - f(p, -\xi)\xi$. On en déduit :

$$|p - \omega| = f(p, \xi)|\xi|, |p - \alpha| = f(p, -\xi)|\xi|, |\alpha(s) - \omega| = \frac{\frac{f(p,\xi)}{f(p,-\xi)} + 1}{\frac{e^s}{f(p,\xi)} + \frac{e^{-s}}{f(p,-\xi)}} e^{-s}, |\alpha(s) - \alpha| = \frac{\frac{f(p,-\xi)}{f(p,\xi)} + 1}{\frac{e^s}{f(p,\xi)} + \frac{e^{-s}}{f(p,-\xi)}} e^s$$

On a alors :

$$\begin{aligned} d(p, \alpha(s)) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{f(p, \xi)}{f(p, -\xi)} \cdot \frac{\frac{f(p,\xi)}{f(p,-\xi)} + 1}{\frac{f(p,-\xi)}{f(p,\xi)} + 1} e^{2s} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{f(p, \xi) + f(p, -\xi)}{f(p, \xi) + f(p, -\xi)} e^{2s} \right) \\ &= s \end{aligned}$$

\square

Corollaire. *Les boules de la distance de Hilbert sont convexes.*

Démonstration. La boule de centre p et de rayon r est l'ensemble des z tels que :

$$\frac{e^r}{f(p, z - p)} + \frac{e^{-r}}{f(p, p - z)} \leq (e^r - e^{-r})$$

Or $\xi \mapsto \frac{1}{f(p,\xi)}$ est convexe donc les boules de la métrique de Hilbert sont convexes. \square

Corollaire. *Un convexe muni de la distance de Hilbert est géodésiquement complet : un arc géodésique issu de p et de direction ξ peut être étendu en une fonction de \mathbb{R} dans le convexe, ses limites respectives en $-\infty$ et $+\infty$ sont alors les ω et α correspondants.*

5 Déformation d'une quadrique complexe

Les métriques de Hilbert ont fait l'objet de plusieurs études : de nombreux résultats permettent de distinguer la métrique hyperbolique des autres métriques de Hilbert, des métriques particulières (issues d'un simplexe, polytope...) ont été étudiées plus en détail. Il n'y a cependant eu aucune généralisation dans le cas de la métrique sphérique, que Klein construit pourtant en parallèle de l'hyperbolique. C'est ce que nous allons essayer de faire dans la suite. Nous allons d'abord voir qu'il est inutile d'essayer, à l'instar des métriques de Hilbert, de remplacer la quadrique par une autre sous-variété de codimension réelle deux. On introduira ensuite une autre façon de voir la métrique sphérique qui nous donnera une méthode pour munir l'espace projectif réel d'autres métriques similaires à celle de Klein.

5.1 Préambule : Distance relative à une paire de droites complexes conjuguées

Nous étudions ici brièvement la distance induite (avec la construction de Klein) par une paire de droites complexes conjuguées sur \mathbb{RP}^2 , nous nous en servirons dans la suite de cette section et aussi dans la suivante pour construire de nouvelles distances sur \mathbb{RP}^2 .

Soit Δ une droite complexe d'équation non réelle. Par action de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ on peut se ramener à décrire notre paire de droites par l'équation $X^2 + Y^2 = 0$.

Propriété. Soient $p = (x : y : z)$ et $q = (x' : y' : z')$ dans $\mathbb{RP}^2 \setminus (0 : 0 : 1)$ alors

$$d_{\Delta}(p, q) = \left| \arctan\left(\frac{xy' - x'y}{xx' + yy'}\right) \right|$$

Démonstration. On fait les calculs dans la carte affine ($z_3 = 1$) (ie on suppose $z = z' = 1 =$). On paramètre (pq) par $\{t(x' - x, y' - y, 0) + (x, y, 1), t\}$ Le point d'intersection a pour affixe t avec $t(x' - x) + x = i(t(y' - y) + y)$, d'où $t = \frac{iy - x}{(x' - x) - i(y' - y)}$.

Or $d_{\Delta}(p, q) = \left| \arg\left(\frac{t}{t-1}\right) \right| = \left| \arctan\left(\frac{xy' - x'y}{xx' + yy'}\right) \right|$.

□

Définition. On pose

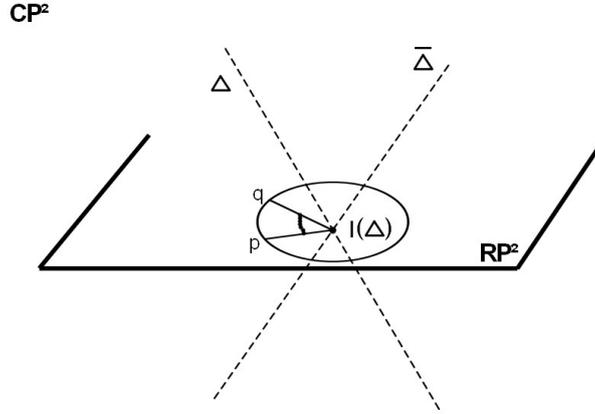
$$\iota: \begin{array}{l} E \mapsto \mathbb{RP}^2 \\ \Delta \mapsto \Delta \cap \bar{\Delta} \end{array}$$

De manière générale, dans une carte affine contenant $\iota(\Delta)$, on peut exprimer le couple de droites comme un polynôme P qui nous donne une forme quadratique sur \mathbb{R}^2 (identifié à la carte avec $\iota(\Delta) = 0$). La distance entre deux points p, q correspond alors à l'aire à l'intérieur du cercle $P = 1$ entre les droites $(\iota(\Delta)p)$ et $(\iota(\Delta)q)$ (celle inférieure à $\pi/2$ donc le plus petit secteur angulaire). Une autre façon de le voir : la forme quadratique P nous donne une notion d'angle, la distance entre deux points est donc l'angle non orienté entre les deux droites vectorielles qu'ils forment.

Remarque. On peut voir notre couple de droites comme une dégénérescence de la conique $\mathcal{C}_{\epsilon} : X^2 + Y^2 = -\epsilon^2 Z^2$ quand ϵ tend vers 0. Il se trouve que sur $\mathbb{RP}^2 \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$ la distance $d_{\mathcal{C}_{\epsilon}}$ tend vers d_{Δ} . Dans le cas où on voudrait déterminer la distance d_{Δ} entre un point et $(0 : 0 : 1)$ le birapport n'est pas défini car on a trois fois le même point. On pourrait donc donner une valeur arbitraire à ces distances (ou ne pas les définir). Cependant, $\frac{\pi}{2}$ est la valeur obtenue quand on fait tendre ϵ vers 0 dans ce cas là (sauf si les deux points sont $(0 : 0 : 1)$ bien sûr). On a donc une extension naturelle de d_{Δ} sur tout \mathbb{RP}^2 .

Corollaire. d_{Δ} est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire, elle n'est en revanche pas séparante. Une telle fonction est appelée pseudo-distance.

Démonstration. En effet, on l'obtient comme limite simple de distances qui vérifient ces propriétés qui passent à la limite. Cependant, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}, d_{\Delta}((x : y : 1), (\lambda x : \lambda y : 1)) = 0$. \square



Distance relative à un couple de droites complexes conjuguées

Remarque. Quand les deux points sont suffisamment proche, on peut exprimer la distance comme

$$d_{\Delta}(p, q) = \left| \arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x'}{y'}\right) \right|$$

en fait cette expression est valable dès qu'elle est inférieure à $\pi/2$, sinon on a

$$d_{\Delta}(p, q) = \pi - \left| \arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x'}{y'}\right) \right| = \left| \pi - \left(\arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x'}{y'}\right) \right) \right|$$

Proposition. $\forall (p, v) \in \mathbb{T}(\mathbb{RP}^2 \setminus \iota(\Delta)), t \mapsto d_{\Delta}(p, \gamma(t))$ est dérivable à droite en 0 (γ désigne un chemin dérivable passant par p en 0 et de vecteur tangent v en ce point). On note $\|v\|_{\Delta, p}$ sa dérivée.

Démonstration. Par action de $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$ on peut se ramener à $X^2 + Y^2 = 0$ et donc, en se plaçant dans la carte affine ($z_3 = 1$) on obtient par un développement limité de \arctan en x/y on obtient :

$$\|v\|_{\Delta, p} = \frac{1}{x^2 + y^2} |xv_y - yv_x|$$

\square

On a ici $\|\cdot\|_{\Delta, \cdot}$ qui va ressembler beaucoup à une norme finslérienne. On veut ainsi pouvoir exprimer d_{Δ} comme un inf de longueurs de chemins. Ce ne sera le cas qu'en y rajoutant la correction suivante :

Définition. Soit $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{RP}^2$ un arc différentiable. On définit $N(\gamma)$ comme le nombre de composantes connexes de $\gamma^{-1}(\iota(\Delta))$ dans $[a, b]$. On peut alors définir la longueur de γ comme :

$$\ell_{\Delta}(\gamma) = \int_{[a, b] \setminus \gamma^{-1}(\iota(\Delta))} \|\dot{\gamma}(t)\|_{\Delta, \gamma(t)} dt + \pi N(\gamma) - \frac{\pi}{2} (\delta_{\gamma(a)=\iota(\Delta)} + \delta_{\gamma(b)=\iota(\Delta)})$$

ie on rajoute π à chaque fois que le chemin passe par $\iota(\Delta)$ sauf si on ne fait qu'en partir ou qu'on y arrive auquel cas on rajoute seulement $\pi/2$ (et donc on enlève ce qu'on avait compté en trop en rajoutant π dans la formule).

Théorème.

$$\forall p, q \in \mathbb{RP}^2, d_\Delta(p, q) = \inf_{\gamma \text{ chemin différentiable de } p \text{ à } q} \ell_\Delta(\gamma)$$

De plus l'inf est atteint par un segment de droite projective reliant p à q .

Démonstration. Si p ou q est $\iota(\Delta)$ la distance est $\pi/2$ et la longueur minimum d'un chemin est $\pi/2$ atteinte par n'importe quel segment de droite géodésique joignant p à q (car on arrive ou part une seule fois par/de $\iota(\Delta)$).

Si $p, q, \iota(\Delta)$ sont alignés la distance est nulle donc toute longueur de chemin est plus grande et le segment joignant p à q sans passer par $\iota(\Delta)$ est de longueur nulle.

Sinon la longueur d'un segment de droite joignant p à q est soit $d_\Delta(p, q)$ soit $\pi - d_\Delta(p, q)$ et comme $d_\Delta(p, q) \leq \pi/2$ un chemin minimisant la longueur évite forcément $\iota(\Delta)$. De ce fait on peut juste faire une minoration de l'intégrale, en notant $x(t) = \gamma_x(t)$ et $y(t) = \gamma_y(t)$:

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} \|\dot{\gamma}(t)\|_{\Delta, \gamma(t)} dt &= \int_a^b \frac{|\dot{y}x - y\dot{x}|}{x^2 + y^2} \\ &\geq \left| \int \frac{\frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{y^2}}{1 + (\frac{x}{y})^2} \right| \\ &\geq \min \left(\left| \arctan \left(\frac{x(b)}{y(b)} \right) - \arctan \left(\frac{x(a)}{y(a)} \right) \right| \right. \\ &\quad \left. , \left| \pi - \arctan \left(\frac{x(b)}{y(b)} \right) - \arctan \left(\frac{x(a)}{y(a)} \right) \right| \right) \\ &\geq \min(d_\Delta(p, q), \pi - d_\Delta(p, q)) \\ &\geq d_\Delta(p, q) \end{aligned}$$

Donc toutes les longueurs de chemins sont supérieures à $d_\Delta(p, q)$ et la borne inférieure est atteinte pour un segment de droite projective (il y en a deux, l'un de la bonne longueur et l'autre de longueur $\pi - d_\Delta(p, q)$). \square

Corollaire. d_Δ est finslérienne sur $\mathbb{RP}^2 \setminus \{\iota(\Delta)\}$

5.2 Cas auto-conjugué

Dans la suite, on se place dans \mathbb{CP}^n avec des coordonnées homogènes $(z_1 : \dots : z_{n+1})$ et on se donne une sous-variété différentielle \mathcal{S} de codimension réelle 2 telle que :

- Pour toute droite réelle d , $|d \cap \mathcal{S}| = 2$
- $\mathcal{S} = \bar{\mathcal{S}}$

On notera $d_\mathcal{S}$ la distance sur \mathbb{RP}^n obtenue par la construction de Klein avec $d_\mathcal{S}$: pour rappel, si p, q sont deux points de $\mathbb{RP}^n \subset \mathbb{CP}^n$, en notant $\{I, \bar{I}\} = (pq) \cap \mathcal{S}$, alors

$$d_\mathcal{S}(p, q) = \frac{1}{2} |\Im \log([I, \bar{I}, p, q])|$$

Par abus de langage et comme on se ramènera à la carte affine $\{z_{n+1} = 1\}$ on confondra $T_m \mathcal{S} \subset T_m \mathbb{CP}^n$ et l'unique sous-espace affine V de $\{z_{n+1} = 1\} \subset \mathbb{CP}^n$ tel que $T_m V = T_m \mathcal{S}$.

Lemme. \mathcal{S} est un revêtement à deux feuillets de l'espace des droites projectives de \mathbb{RP}^n

Démonstration. La projection va être $\pi : m \mapsto (m\bar{m})$, montrons que c'est un homéomorphisme local. Elle est continue et pour trouver un inverse local, il suffit de voir que tout point m de $\mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{RP}^n$ admet un voisinage U tel que $U \cap \bar{U} = \emptyset$. Soit $m \in \mathcal{S}$ et U un tel voisinage dans $\mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{RP}^n$ que l'on a restreint à \mathcal{S} . On a alors une bijection réciproque à π qui à une droite réelle d dans $\pi(U)$ associe l'unique point n de U tel que $(n\bar{n}) = d$. \square

Corollaire. \mathcal{S} est compact et en particulier fermé.

Démonstration. Par dualité $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ est homéomorphe à l'espace de ses droites projectives et \mathcal{S} est donc le revêtement à deux feuillets d'un espace compact, il est donc compact. \square

Propriété. Dans tout ouvert U de \mathcal{S} , il existe au moins un point m tel que \mathcal{S} et $(m\bar{m})$ soient transverses.

Démonstration. Supposons que ce ne soit pas le cas, on a alors, $\forall m \in U$, $\dim(T_m\mathcal{S} \cap T_m(m\bar{m})) = 1$, on peut donc faire un choix en chaque point de U d'un vecteur tangent non nul de manière continue. On a donc un champ de vecteurs sur U , or, l'ensemble des droites complexes d'équation réel feuillète \mathcal{S} donc en particulier U (car \mathcal{S} est sans point réel). Le champ de vecteurs est alors tangent en tout point à ce feuilletage par construction; on en déduit que si on l'intègre, les trajectoires sont incluses dans les feuilles, ce qui est absurde car une feuille est de cardinal inférieur à 2. \square

Théorème. Si $d_{\mathcal{S}}$ vérifie l'inégalité triangulaire, \mathcal{S} est conjuguée par l'action de $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})$ à la quadrique d'équation $X_1^2 + \dots + X_{n+1}^2 = 0$.

L'ingrédient essentiel de la preuve est le lemme suivant, prouvé plus bas. Le théorème découle alors du théorème de Chow rappelé ci-dessous.

Lemme. Si $d_{\mathcal{S}}$ vérifie l'inégalité triangulaire, alors en tout point m de \mathcal{S} , l'espace tangent $T_m\mathcal{S}$ est un hyperplan complexe de $T_m\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, c'est à dire $i.T_m\mathcal{S} = T_m\mathcal{S}$.

Théorème (Chow). Toute sous-variété analytique fermée de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ est algébrique, i.e. de la forme $\cap_{i=1}^k P_i^{-1}(0)$ où pour tout i , P_i est un polynôme homogène de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n+1}]$.

La preuve nous emmènerait trop loin et nous forcerait à introduire trop de concepts. On pourra se référer à [3].

Preuve du théorème. Par le lemme et la remarque suivante, \mathcal{S} est une sous-variété complexe de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ et on a vu qu'elle était fermée.

Remarque. Soit N une variété complexe et M une sous-variété réelle de dimension paire de N . Si pour tout m de M , T_mM est un sous-espace complexe de T_mN , M est une sous-variété complexe de N .

Par le théorème de Chow, \mathcal{S} est donc algébrique; étant de codimension complexe 1, elle s'écrit $P^{-1}(0)$ avec $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n+1}]$ homogène. Montrons que P est de degré 2. Pour cela, la proposition démontrée plus haut nous donne l'existence d'une droite d transverse à \mathcal{S} . Le degré de P se lit alors comme $\mathrm{Card}(P^{-1}(0) \cap d) = 2$, en effet, la condition de transversalité implique que, lu sur cette droite, le polynôme est séparable et les racines sont donc de multiplicité 1. \mathcal{S} est donc une quadrique. La condition $\mathcal{S} = \bar{\mathcal{S}}$ implique que P est à coefficients réels et comme $\mathcal{S} \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^n = \emptyset$, P est bien conjugué par l'action de $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})$ au polynôme annoncé. Pour être complet, on rappelle une preuve de la remarque précédente.

Soit $2k = \dim_{\mathbb{R}} M$ et $n = \dim_{\mathbb{C}} N$. Vérifions par exemple qu'au voisinage U de tout $m \in M$ dans N , identifié par une carte holomorphe φ de N à un ouvert de \mathbb{C}^n , M est le graphe d'une fonction holomorphe f d'un ouvert V de $\mathbb{C}^k \times \{0\}$ dans \mathbb{C}^{n-k} . Comme M est une sous-variété réelle de dimension $2k$ de N , on obtient ce qui précède avec une fonction f différentiable (pour lire M comme un graphe dans une décomposition complexe $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$ de \mathbb{C}^n , choisir φ envoyant, en m , un supplémentaire complexe de T_mM dans T_mN sur $\{0\} \times \mathbb{C}^{n-k}$). Mais alors f est holomorphe. En effet, soit $(z_j)_{j=1}^k = (x_j + iy_j)_{j=1}^k$ des coordonnées complexes de $\mathbb{C}^k \times \{0\}$. On doit montrer, pour tout j , que $i \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial y_j}$. Comme M est le graphe de f , $T_{f(p)}M = \{(v, df(p).v) \mid v \in \mathbb{C}^k\}$ pour tout $p \in V$. Donc si $i.T_{f(p)}M = T_{f(p)}M$, alors $(i \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(p), i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)) = i \cdot (\frac{\partial}{\partial x_j}(p), \frac{\partial f}{\partial x_j}(p))$ est

dans $T_{f(p)}M$ donc s'écrit $(i.\frac{\partial}{\partial x_j}(p), df(p).(i.\frac{\partial}{\partial x_j}))$. Mais $i.\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}$, donc $df(p).(i.\frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{\partial f}{\partial y_j}(p)$, ce qui conclut. \square

Preuve du lemme. Notons $P = T_m\mathcal{S}$. On note d_P la distance relative à $P \cup \bar{P}$ obtenue par la construction de Klein. On va supposer que P n'est pas une droite complexe et montrer que d_P ne vérifie pas l'inégalité triangulaire du fait que ce n'est pas une sous-espace complexe (un tel sous espace vérifiant l'inégalité triangulaire avec égalité comme vu dans la section précédente). On montrera alors que cette inégalité dans le mauvais sens se transmet aussi à $d_{\mathcal{S}}$, aboutissant ainsi à une absurdité. La première partie de la preuve consiste à faire agir $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})$ afin de simplifier les calculs à suivre.

Supposons que $P \neq i.P$ et notons $P' = P \cap i.P$. Comme $\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} P = 2$, $\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} P' \leq 4$, mais P' étant un sous-espace complexe de $T_m\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, cela signifie que $\mathrm{codim}_{\mathbb{C}} P' \leq 2$, avec égalité car $P' \subsetneq P$.

Faisant agir $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})$, transitif sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}\mathbb{P}^n$, on suppose désormais que $m = (0 : \dots : 0 : i : 1)$. Soit $D = T_m(m\bar{m}) = \{z_1 = \dots = z_{n-1} = 0\}$. Comme P est transverse à D , P s'écrit $\{(z_1, \dots, z_{n-1}, \varphi(z_1, \dots, z_{n-1}))\}$ pour une certaine fonction \mathbb{R} -linéaire φ . De plus, quitte à permuter deux indices de coordonnées, on peut aussi supposer que $P' = \{(z_1, \dots, z_n) \in P \mid z_{n-1} = \psi(z_1, \dots, z_{n-2})\}$ pour une certaine forme \mathbb{C} -linéaire ψ . Alors $w = (0, \dots, 0, 1, \varphi(0, \dots, 0, 1))$ et $w' = (0, \dots, 0, i, \varphi(0, \dots, 0, i))$ sont dans $P \setminus P'$ et sont libres sur \mathbb{R} , donc tels que $P = P' \oplus_{\mathbb{R}} \mathbb{R}w \oplus_{\mathbb{R}} \mathbb{R}w'$. On pose $H = P' \oplus_{\mathbb{C}} \mathbb{C}w$. On vérifie que le stabilisateur de m dans $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})$ est :

$$\mathrm{Stab}(m) = \left\{ \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ D & a & -b \\ E & b & a \end{pmatrix} \mid C \in \mathrm{GL}_{n-2}(\mathbb{R}), D \in \mathbb{R}^{n-2}, E \in \mathbb{R}^{n-2}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } a^2 + b^2 = 1 \right\},$$

son action correspondante sur $T_m\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, dans ses coordonnées naturelles, est donc $\{\gamma_{C,E,D,\theta}\}$ où :

$$\gamma_{C,E,D,\theta} = e^{-i\theta} \begin{pmatrix} C & 0 \\ D - iE & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \text{ avec } e^{i\theta} = a + ib.$$

En effet, en regardant l'action différenciée sur un vecteur (z_1, \dots, z_n) et en notant $\mathbf{z} = {}^t(z_1, \dots, z_{n-1})$ on a :

$$\begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ D & a & -b \\ E & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} tz_1 \\ \vdots \\ tz_{n-1} \\ i + tz_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tC\mathbf{z} \\ tD\mathbf{z} + ie^{i\theta} + atz_n \\ tE\mathbf{z} + e^{i\theta} + btz_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{-i\theta}C\mathbf{z} + 0z_n + o(t) \\ i + (D - iE)e^{-i\theta}\mathbf{z} + e^{-2i\theta}z_n + o(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où le résultat (attention, bien que le vecteur soit écrit en colonne pour plus de lisibilité, on considère bien un élément de $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, il est donc défini à proportionnalité près). Comme H est transverse à D , quitte à faire agir $\gamma_{\mathrm{Id},E,D,0}$ avec la forme linéaire $D - iE$ convenable, on peut supposer que $H = \{z_n = 0\}$. Alors $w = (0, \dots, 0, 1, 0)$ et $w' = (0, \dots, 0, i, \lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$. Faisant agir $\gamma_{\mathrm{Id},0,0,\theta}$ avec θ convenable, on peut supposer λ réel (nécessairement non nul, sinon $P = i.P$). Alors comme $P' \subset H$, $P' = \{(\mathbf{z}, 0, 0) + \psi(\mathbf{z})w \mid \mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n-2}\}$ et P s'écrit donc :

$$P = \{(\mathbf{z}, 0, 0) + \psi(\mathbf{z})w + kw + \ell w' \mid \mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n-2}, (k, \ell) \in \mathbb{R}^2\} = \{(\mathbf{z}, \psi(\mathbf{z}) + k + i\ell, \lambda\ell) \mid \mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n-2}, (k, \ell) \in \mathbb{R}^2\}$$

Dans la carte affine $U = \{z_{n+1} = 0\}$, on note désormais P et H les sous-espaces respectivement réel et complexe, tangents à $P \subset T_m\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ et $H \subset T_m\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ en m . Comme $m \in H$ et $m \in P$, dans U :

H désigne $\{z_n = i\} = \{y_n = 1, x_n = 0\}$ et P désigne $\{y_n = 1, x_n = \frac{1}{\lambda}\mathfrak{S}(z_{n-1} - \psi(z_1, \dots, z_{n-2}))\}$.

Remarque. Plus haut, le vecteur w a été choisi de sorte qu'à présent, les points $m, \bar{m}, m + w$ et $\bar{m} + \bar{w}$ de l'espace affine U sont coplanaires (dans le plan à présent d'équation $\{z_1 = \dots = z_{n-2} = 0\}$).

Nous nous sommes ramenés à un cas plus simple pour les calculs, nous allons maintenant introduire une certaine famille de triangle et tester si l'inégalité triangulaire est vérifiée avec d_P pour chacun d'eux.

Prenant $\alpha \in \mathbb{R}$, on introduit dans $\{z_1 = \dots = z_{n-2} = 0\} \simeq \mathbb{RP}^2 \subset \mathbb{RP}^n$ le triangle (pqr) avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} p = (0 : \dots : 0 : 0 : 1 : 0) \\ q = (0 : \dots : 0 : 0 : 0 : 1) \\ r = (0 : \dots : 0 : \alpha : 1 : 1) \end{array} \right. \quad \text{et on note : } \left\{ \begin{array}{l} d = (pq) = \{(0 : \dots : 0 : 0 : u : v)\} \\ d' = (pr) = \{(0 : \dots : 0 : \alpha u : v : u)\} \\ d'' = (qr) = \{(0 : \dots : 0 : \alpha u : u : v)\}. \end{array} \right.$$

Les points sont choisis pour que $d = (m\bar{m})$ (et ainsi $d \cap P = d \cap H = \{m\}$) et que $d' \cap P = d' \cap H$. En effet $d' \cap P = \{m'\}$ avec $m' = (0 : \dots : 0 : \alpha : i : 1) \in H$. Par ailleurs, $d'' \cap H = \{m''\}$ avec $m'' = (0 : \dots : 0 : \alpha i : i : 1)$ et $d'' \cap P = \{n''\}$ avec $n'' = (0 : \dots : 0 : \alpha(\lambda\alpha + i) : \lambda\alpha + i : 1)$.

Mais alors, l'inégalité triangulaire :

$$d_P(p, q) \leq d_P(p, r) + d_P(r, q)$$

ne peut être vraie pour tout α . En effet :

- puisque $d \cap P = d \cap H$ et $d' \cap P = d' \cap H$, on a : $d_P(p, q) = d_H(p, q)$ et $d_P(p, r) = d_H(p, r)$,
- par la partie précédente, $d_H(p, q) = d_H(p, r) + d_H(r, q)$.

Par conséquent, l'inégalité triangulaire est vraie si et seulement si $d_P(r, q) \geq d_H(r, q)$, c'est-à-dire : $\Im(\ln \frac{q-n''}{r-n''}) \geq \Im(\ln \frac{q-m''}{r-m''})$ (on peut enlever les valeurs absolues car on prendra des petites valeurs de α de sorte que les parties imaginaires soient positives), ou encore : $\Im(\ln \frac{q-n''}{q-m''} - \ln \frac{r-m''}{r-n''}) \geq 0$. Or, en utilisant la coordonnées z_{n-1} des différences de points affines qui apparaissent :

$$\begin{aligned} \Im\left(\ln \frac{q-n''}{q-m''}\right) &= \Im\left(\ln \frac{\lambda\alpha + i}{i}\right) = \arctan(\lambda\alpha) = \lambda\alpha + o(\alpha), \\ \Im\left(\ln \frac{r-n''}{r-m''}\right) &= \Im\left(\ln \frac{\lambda\alpha + i - 1}{i - 1}\right) = \arctan\left(\frac{\lambda\alpha}{-2 + \lambda\alpha}\right) = -\frac{\lambda\alpha}{2} + o(\alpha), \end{aligned}$$

donc $\Im(\ln \frac{q-n''}{q-m''} - \ln \frac{r-m''}{r-n''}) = \frac{3\lambda\alpha}{2} + o(\alpha)$ et l'inégalité triangulaire est donc fautive pour les petites valeurs strictement négatives de α .

Enfin, cette inégalité triangulaire dans le mauvais sens persiste quand on ne considère plus d_P mais d_S . En effet, comme $P = T_m \mathcal{S}$ et par construction de p, q, r , on a

$$\begin{aligned} d_S(p, q) &= d_P(p, q), \\ d_S(p, r) &= d_P(p, r) + o(\alpha), \\ d_S(r, q) &= d_P(r, q) + o(\alpha), \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire

$$d_S(p, q) \leq d_S(p, r) + d_S(r, q)$$

est fautive pour des petites valeurs strictement négatives de α . □

5.3 Idées d'une démonstration plus générale

On veut ici oublier l'hypothèse d'auto-conjugaison (en gardant l'absence de points réels). En faisant cela, on obtiendrait des distances potentiellement non-symétriques. Comme les intersections entre droites réelles et variété ne seront plus conjuguées, ce n'est plus la même chose de prendre le rapport avec l'un ou l'autre de ces points. Il va donc falloir orienter les droites et faire correspondre à une droite orientée un point de la surface. Ce ne sera cependant pas utile ici puisque nos résultats seront locaux, l'orientation y sera donc toujours la même.

On se donne une droite réelle \mathcal{D} , elle intersecte \mathcal{S} en m, m' (qui ne sont plus forcément conjugués). On considère l'espace tangent en m qu'on va ici supposer complexe, $T_m\mathcal{S}$ est donc une droite complexe et $T_{m'}\mathcal{S}$ aussi. On va construire une métrique de Funk par rapport à $T_m\mathcal{S}$. On peut supposer que $\mathcal{P} := T_m\mathcal{S}$ n'est pas d'équation réelle (on a montré dans le paragraphe précédent que tous les espaces tangents ne pouvaient pas être réels), on a alors un unique point réel sur la droite. On se ramène alors par action de $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$ à $m = (0 : i : 1)$ et $\mathcal{P} = \{(\lambda : i : 1), \lambda \in \mathbb{C}\}$ on a alors $\mathcal{D} = \{(0 : t : 1), t \in \mathbb{R}\}$.

La distance de Funk/Hilbert relative à \mathcal{P} , $d_{\mathcal{P}}$ vérifie l'inégalité triangulaire et on a égalité dans le triangle. Le but est de trouver une condition pour que $\forall p \in \mathcal{D}, d_{\mathcal{P}}(p, \cdot) \leq d_{\mathcal{S}}(p, \cdot)$ et $d_{\mathcal{P}}(\cdot, p) \leq d_{\mathcal{S}}(\cdot, p)$. Si ce n'est en effet pas le cas, le but serait de trouver des points p, q, r avec p, q sur la droite et r en dehors tels que $d_{\mathcal{P}}(p, r) > d_{\mathcal{S}}(p, r)$ et $d_{\mathcal{P}}(r, q) > d_{\mathcal{S}}(r, q)$. On aurait alors :

$$d_{\mathcal{S}}(p, r) + d_{\mathcal{S}}(r, q) < d_{\mathcal{P}}(p, r) + d_{\mathcal{P}}(r, q) = d_{\mathcal{P}}(p, q) = d_{\mathcal{S}}(p, q)$$

et donc un défaut dans l'inégalité triangulaire.

On prendra $p = (0 : 1 : 0)$ (le point à l'infini de la droite) et $q = (x : y : 1)$, $y > 0$, on a donc $(pq) = \{(x : \lambda : 1), \lambda \in \mathbb{C}\}$.

$(pq) \cap \mathcal{P} = (x : i : 1)$ et $(pq) \cap \mathcal{S} = (x : z : 1)$ pour un certain $z \in \mathbb{C}$. La condition va ici reposer sur z .

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{P}}(p, q) &= \arg\left(\frac{-ix}{-ix - \frac{x}{y}}\right) \\ &= \arg\left(-i\left(i - \frac{1}{y}\right)\right) \\ d_{\mathcal{P}}(p, q) &= \arctan\left(\frac{1}{y}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{S}}(p, q) &= \arg\left(\frac{\frac{x}{z}}{\frac{x}{z} - \frac{x}{y}}\right) \\ &= \arg\left(\frac{1}{1 - \frac{z}{y}}\right) \\ &= \arg(y - \bar{z}) \end{aligned}$$

Il faut alors distinguer deux cas selon le signe de $y - \Re(z)$.

Si $y > \Re(z)$: $d_{\mathcal{S}}(p, q) = \arctan\left(\frac{\Im(z)}{y - \Re(z)}\right)$. La condition se réécrit donc, par croissance de arctan comme

$$y > \Re(z) \text{ et } \frac{1}{y}\Re(z) + \Im(z) \geq 1$$

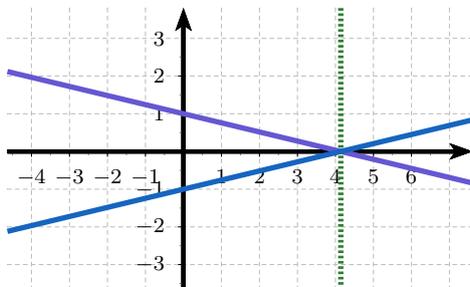
Si $y < \Re(z)$: $d_{\mathcal{S}}(p, q) = \arctan\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z) - y}\right)$. Donc par croissance de arctan,

$$y < \Re(z) \text{ et } \frac{1}{y}\Re(z) - \Im(z) \leq 1$$

Mais cette condition doit être valide pour tout $y > 0$ donc :

$$z \in \bigcap_{y>0} \left(y > \Re(z) \text{ et } \frac{1}{y} \Re(z) + \Im(z) \geq 1 \right) \cup \left(y < \Re(z) \text{ et } \frac{1}{y} \Re(z) - \Im(z) \leq 1 \right)$$

Pour comprendre ce domaine, on va en représenter un à y fixé.



Le domaine qui nous intéresse est celui au dessus des deux droites. La droite de pente négative passera toujours par $(0, 1)$ et les deux s'intersecteront toujours en $(y, 0)$. On en déduit :

$$z = ki, k \geq 1$$

On doit donc avoir au voisinage de m des points de \mathcal{S} de la forme $(x : k_x i : 1)$, $k_x > 1$. Cette condition ne démontre rien sur l'existence ou non de sous-variétés \mathcal{S} permettant de construire des métriques sur $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ par la méthode de Klein, cependant, le fait qu'elle soit fermée d'intérieur vide montre une certaine absence de marge de manoeuvre pour construire de telles sous-variétés.

6 Déformation des mesures

6.1 Mesures sur l'ensemble des droites projectives complexes conjuguées

6.1.1 Construction de métriques

Il a été montré dans la partie précédente que la construction de Klein issue de couples $\{\Delta, \overline{\Delta}\}$ de droites complexes conjuguées avait des propriétés intéressantes. Elle induit une pseudo-distance sur $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, elle est non séparante pour les couples de points alignés avec $\iota(\Delta)$. Elle est cependant finslérienne sur $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ privé de ce point. Mais alors on peut sommer de telles pseudo-distances pour limiter l'ensemble des paires de points non séparés.

Concrètement, on se donne $E := \{\Delta \cup \overline{\Delta}, \Delta \text{ droite complexe d'équation non réelle}\}$ et pour $\Delta \in E$ (on notera indifféremment le couple de droites ou une de ses composantes), la construction de Klein nous donne une pseudo-distance d_Δ .

Définition. Soit μ une mesure de probabilité sur E . On lui associe la fonction :

$$d_\mu : (p, q) \mapsto \int_E d_\Delta(p, q) d\mu(\Delta)$$

Remarque. Par construction et propriétés des d_Δ , d_μ est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire. Les propriétés qu'il reste sont donc : quand est-elle séparante ? Continue ?

Définition. Soit μ une mesure sur E . On dit que $\iota(E)$ est essentiellement μ -aligné si

$$\exists A \subset E, \mu(A) = 1 \text{ et } \exists D \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \text{ droite projective, } \iota(A) \subset D$$

Théorème. Soit μ une mesure sur E telle que $\iota(E)$ soit non essentiellement μ -aligné, alors d_μ est séparante et est donc une distance sur \mathbb{RP}^2 .

De plus si $\iota_*\mu$ ne charge aucun segment alors d_μ est continue (en particulier elle induit la topologie canonique de \mathbb{RP}^2).

Remarque. Il est équivalent de demander que $\iota_*\mu$ ne charge aucun segment ou aucune droite projective. En effet, une droite projective est union de deux segments et est donc de mesure nulle si aucun segment n'est chargé.

Démonstration. Soit μ une telle mesure. Montrons que d_μ est séparante. Soient $p, q \in \mathbb{RP}^2$ tels que $d_\mu(p, q) = 0$ et supposons les distincts. Soit $A = \{\Delta \in E / d_\Delta(p, q) = 0\}$. Par hypothèse, $\mu(A) = 1$, or, E étant μ -essentiellement non aligné, soient $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \in A$ tels que $\iota(\Delta_1), \iota(\Delta_2)$ et $\iota(\Delta_3)$ soient non alignés. Or $\forall i, d_{\Delta_i}(p, q) = 0$ donc $\forall i, \iota(\Delta_i) \in (pq)$ ce qui est absurde car les trois points sont non alignés, donc $p = q$.

Supposons à présent que μ ne charge aucun segment. Soit $(p_n)_n, (q_n)_n \in (\mathbb{RP}^2)^\mathbb{N}$ telles que

$$(p_n, q_n) \rightarrow (p, q)$$

. Pour $\Delta \in E$, si $(d_\Delta(p_n, q_n))_n$ ne converge pas vers $d_\Delta(p, q)$ alors $\iota(\Delta) \in (pq)$ mais dans tous les cas on a $\forall n, |d_\Delta(p_n, q_n) - d_\Delta(p, q)| \leq \pi$. Comme les distances sont bornées, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et en déduire :

$$|d_\mu(p, q) - \lim d_\mu(p_n, q_n)| \leq \pi \iota_*\mu((pq)) = 0$$

Donc d_μ est continue. □

6.1.2 Lien avec la construction de Klein

On veut retrouver la métrique ronde à l'aide de notre nouvelle construction. Il nous faut pour cela construire la mesure qui permettra de l'obtenir. Cette mesure doit être $\text{PO}_{n+1}(\mathbb{R})$ invariante car c'est le groupe d'isométrie de la métrique ronde. Il semble donc naturel de la faire porter par des hyperplans tangents à la quadrique $Q : X_1^2 + \dots + X_{n+1}^2 = 0$.

Soit μ la mesure de Haar (de probabilité) de $\text{PO}_{n+1}(\mathbb{R})$. Comme le groupe est compact, il est unimodulaire, c'est donc une mesure de Haar à gauche et à droite.

On va munir Q d'une mesure de probabilité invariante par action de $\text{PO}_{n+1}(\mathbb{R})$ que l'on transformera en une mesure sur les hyperplans par l'application qui a un point de la quadrique lui associe son hyperplan tangent.

Propriété. Il existe une unique mesure de proba sur Q invariante par l'action de $\text{PO}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Pour l'existence, soit $\mathcal{M}(Q)$ l'ensemble des mesures de proba sur la quadrique. Il s'agit d'un ensemble convexe (dans l'ensemble des mesures sur la conique) et d'après le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki, il est compact pour la topologie faible-*, qui est ici métrisable avec la distance $d(\nu_1, \nu_2) = \sum_n \frac{|\int \phi_n d\nu_1 - \int \phi_n d\nu_2|}{2^n(1+\|\phi_n\|_\infty)}$ où $(\phi_n)_n$ est une famille dense des fonctions continues sur Q . On introduit l'application

$$\Omega : \begin{array}{ll} \mathcal{M}(Q) & \mapsto \mathcal{M}(Q) \\ \nu & \mapsto \int_{\text{PO}_{n+1}(\mathbb{R})} \gamma^* \nu d\mu(\gamma) \end{array}$$

Soit $\nu \in \mathcal{M}(Q)$ alors $\Omega(\nu) \in \mathcal{M}(Q)$ car μ est aussi de proba et Q est stable par $\text{PO}_{n+1}(\mathbb{R})$. De plus, par définition de la mesure de Haar, $\Omega(\nu)$ est invariante par l'action de $\text{PO}_{n+1}(\mathbb{R})$. On a donc montré l'existence d'une telle mesure (prendre par exemple $\nu = \delta_m$ avec $m \in Q$).

Pour l'unicité, remarquons d'abord que si on a déjà une telle mesure, elle est point fixe de l'application Ω , l'application est donc surjective dans l'ensemble des mesures $\text{PO}_{n+1}(\mathbb{R})$ invariantes.

Il suffit donc de montrer que Ω est une application constante. Remarquons que c'est déjà le cas pour les diracs. Soient $p, q \in Q$, il existe $\gamma \in \text{PO}_{n+1}(\mathbb{R})$ tel que $\gamma p = q$. Alors $\gamma^* \delta_q = \delta_p$ donc :

$$\Omega(\delta_p) = \Omega(\gamma^* \delta_q) = \gamma^* \Omega(\delta_q) = \Omega(\delta_q)$$

Ensuite par linéarité, c'est encore le cas pour les sommes pondérées de diracs. On va alors utiliser le théorème de Krein-Milman.

Théorème (Krein-Milman). *Tout convexe compact d'un espace localement convexe séparé est l'enveloppe convexe-fermée de l'ensemble de ses points extrémaux.*

$\mathcal{M}(Q)$ remplit ici les hypothèses du théorème, il ne reste plus qu'à déterminer l'ensemble de ses points extrémaux. Les diracs en font bien sûr partie : soit $p \in Q$, supposons que $\delta_x = t\nu_1 + (1-t)\nu_2$ avec $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}(Q)$, on a $\text{supp}(\nu_1) = \text{supp}(\nu_2) = \{p\}$ donc $\nu_1 = \nu_2 = \delta_p$. Réciproquement, supposons que $\nu \in \mathcal{M}(Q)$ ne soit pas une mesure de Dirac. Il existe alors une partie $A \subset Q$, ν -mesurable telle que $\nu(A)\nu(Q \setminus A) > 0$. On peut alors écrire $\nu = \nu(A)(\frac{1}{\nu(A)}\nu|_A) + (1 - \nu(A))(\frac{1}{\nu(Q \setminus A)}\nu|_{Q \setminus A})$, ce n'est donc pas un point extrémal.

On peut donc approcher n'importe quel élément de $\mathcal{M}(Q)$ par des sommes pondérées de mesures de Dirac sur lesquelles Ω est constante. Or Ω est continue : en effet, on a $d(\Omega(\nu_1), \Omega(\nu_2)) = \int d(\gamma^* \nu_1, \gamma^* \nu_2) d\mu(\gamma)$ et l'action de γ étant continue, on obtient la continuité de Ω qui est donc constante, d'où l'unicité d'une mesure $\text{PO}_{n+1}(\mathbb{R})$ invariante. \square

Corollaire. *La mesure ainsi construite est stable par conjugaison.*

Démonstration. En effet si on prend sa conjuguée, c'est aussi une mesure de probabilité sur Q invariante par $\text{PO}_{n+1}(\mathbb{R})$ donc par unicité elles sont égales. \square

On a donc maintenant une mesure sur les hyperplans tangents à Q que l'on transforme en une mesure μ (on n'a plus besoin de la mesure de Haar sur $\text{PO}_{n+1}(\mathbb{R})$) sur E par l'application $\Delta \mapsto \Delta \cup \bar{\Delta}$. On a donc une distance associée d_μ .

Lemme. *d_μ est continue.*

Démonstration. On fait ici la preuve en dimension 2. On a vu dans la partie précédente qu'il suffit de montrer que $\iota_* \mu$ ne charge aucun segment. Supposons par l'absurde que ce soit le cas, par action de $\text{PO}_3(\mathbb{R})$ on peut amener ce segment sur n'importe quel autre de même longueur (pour la distance usuelle sur $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$), ainsi tous les segments sont chargés ce qui est absurde car μ est une mesure de probabilité. \square

Théorème. *Soit d_0 la distance ronde sur $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ alors $d_0 = d_\mu$*

Démonstration. On se donne une droite projective D de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ et un point p sur cette droite. Soit $n \in \mathbb{N}$, on se donne alors une subdivision de la droite (qui est difféomorphe un cercle) en n intervalles de longueur π/n pour d_0 en partant de p , on obtient des points $(p_i)_{0 \leq i \leq n}$ avec $p_0 = p = p_n$. $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$ agit sur le cercle droite par rotation et comme ce sont des isométries pour d_μ donc $\forall i d_\mu(p_i, p_{i+1}) = \ell \geq 0$.

On regarde alors $\sum_{i=0}^{n-1} d_\mu(p_i, p_{i+1}) = n\ell$, en permutant la somme avec les intégrales on obtient :

$$\ell = \frac{1}{n} \int_E \sum_{i=0}^{n-1} d_\Delta(p_i, p_{i+1}) d\mu(\Delta)$$

Or si $\iota(\Delta) \notin D$ on a $\sum_{i=0}^{n-1} d_{\Delta}(p_i, p_{i+1}) = \pi$ et $\iota^{-1}(D)$ étant μ -négligeable, on en déduit :

$$\ell = \frac{1}{n} \int_{E \setminus \iota^{-1}(D)} \sum_{i=0}^{n-1} d_{\Delta}(p_i, p_{i+1}) d\mu(\Delta) = \frac{\pi}{n}$$

On a alors $\forall i, j, d_{\mu}(p_i, p_j) = \frac{\min(|i-j|, n-|i-j|)\pi}{n} = d_0(p_i, p_j)$ et on peut faire cette construction pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$ de manière à faire coïncider les distances sur une famille dense de points de la droite, par continuité elles coïncident sur toute la droite. Les distances sont ensuite égales sur tout \mathbb{RP}^2 car tout couple de points distincts de \mathbb{RP}^2 peut être relié par une droite projective. \square

6.2 Mesures discrètes

La section qui suit présente des traces de recherche concernant les mesures à support fini $\sum_{i=1}^k r_i \delta_{\Delta_i}$. Le but de cette étude était ensuite d'approcher une mesure quelconque par ces mesures discrètes (bien que E ne soit pas compact, ce qui serait un problème à contourner). Il convient cependant d'y mettre un bémol. Par souci de simplicité, cette section se concentre sur la dimension 2 et les problèmes de combinatoire qui apparaissent en dimension supérieure pourraient s'avérer plus complexes (ne serait-ce que trouver les configurations de droites pour lesquelles la distance induite est séparante). De plus, aucune des distances présentées ici ne sera continue, discontinuité que nous avons déjà faite apparaître dans une section précédente. Le cas d'un seul couple de droites a déjà été étudié, nous commençons donc ici avec 2.

On admettra dans la suite le fait suivant (dont une preuve complète serait fastidieuse et peu intéressante) :

Théorème. *La fonction qui a une mesure à support fini $\mu \in \mathcal{M}(Q)$ associe sa pseudo-distance d_{μ} sur \mathbb{RP}^2 est injective.*

Démonstration. On ne donne ici que des idées de preuves. Il est d'abord aisé de retrouver les $\iota(\Delta_i)$ car ils correspondent à des discontinuités pour la pseudo-distance. De plus la valeur de ces discontinuités nous donne le poids r_i . La partie plus complexe est ensuite de retrouver combien de couples de droites passent par un même point, lesquelles sont-elles et quel poids y est associé. L'idée est de regarder la distance induite sur un tout petit cercle autour de ce point p pour négliger l'influence des autres couples de droites et on peut ainsi isoler la pseudo-distance

$$\sum_{\iota(\Delta_i)=p} r_i d_{\Delta_i}. \quad \square$$

En particulier, quand on cherchera à étudier si deux configurations de couples de droites (sous entendu mesures discrètes) induisent des pseudo-distances identiques sous l'action de $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$, on supposera implicitement qu'elles ont les mêmes répartitions de poids car on cherchera à envoyer l'une sur l'autre par un élément de $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$. Si on a deux configurations $(\Delta_i, r_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(\Delta'_i, r'_i)_{1 \leq i \leq n'}$ et qu'on veut vérifier qu'elles induisent des distances identiques sous l'action de $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$ on supposera $n = n'$ et $\forall i \exists j r_i = r'_j$. On voudra alors $\gamma \in \text{PGL}_3(\mathbb{R})$ tel que $\gamma \Delta_i = \Delta'_j$.

Nous n'étudions ici que les isométries issues de $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$, en effet les potentielles autres ont peu d'intérêt car elles disparaîtront quand on aura une mesure suffisamment diffuse pour que les seules géodésiques soient les droites projectives (qui sont de toute façon des géodésiques). Une isométrie transformerait alors les segments en segments et, de ce fait, préserverait l'alignement. D'après le Théorème fondamental de la géométrie projective, il s'agira donc forcément d'un élément de $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$.

6.2.1 Cas de deux couples de droites

On se donne ici deux couples de droites complexes conjuguées Δ_1, Δ_2 . Nous allons distinguer les cas où $\iota(\Delta_1) = \iota(\Delta_2)$ et où ils sont distincts. Bien sûr, ces deux configurations ne peuvent être homéomorphes car dans le premier cas, la distance n'est pas séparante sur toutes les droites passant par $\iota(\Delta_1)$ et dans le second uniquement sur la droite $(\iota(\Delta_1)\iota(\Delta_2))$.

Cas $\iota(\Delta_1) = \iota(\Delta_2)$ On peut tout d'abord supposer par action de $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$ que $\iota(\Delta_1) = (1 : 0 : 0) =: m$. On va alors étudier l'action de $\text{Stab}(m)$ sur notre couple de droites.

On a d'abord un invariant, il s'agit du birapport $[\Delta_1, \Delta_2, \overline{\Delta_1}, \overline{\Delta_2}]$ (plus précisément l'ensemble qu'il décrit quand on permute les droites dans le birapport).

Par exemple, si on prend $\Delta_1 = (z_2 = \pm iz_3), \Delta_2 = (z_2 = \pm kiz_3), k \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Le birapport vaut alors $[i, ki, -i, -ki] = \frac{4k}{(k+1)^2}$. En particulier si on prend $k = 2$ les birapports décrivent l'ensemble $\{8/9; 1/9; 9/8; -1/8; 9; -8\}$ et avec $k = 3$ on obtient $\{3/4; 1/4; 4/3; -1/3; 4; -3\}$, ces deux configurations ne sont donc pas les mêmes sous l'action de $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$.

De manière générale, on peut envoyer Δ_1 sur $(z_2 = \pm iz_3)$, on a alors $\Delta_2 = (z_2 = \alpha z_3) \cup (z_2 = \bar{\alpha} z_3)$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup \{\pm i\})$. Le birapport vaut alors $[i, \alpha, -i, \bar{\alpha}] = \frac{4\Im(\alpha)}{|\alpha+i|^2}$.

On voit α et i dans un même demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ (quitte à remplacer α par son conjugué). Si on note $\Delta(\alpha)$ le couple de droite complexes conjuguées passant par m' et de coefficients directeurs $\alpha, \bar{\alpha}$ on a $[\Delta(\alpha), \Delta(\alpha'), \Delta(\alpha''), \Delta(\alpha''')] = [\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''']$. L'action de $\text{Stab}(m)$ correspond alors à celle d'un $\text{PGL}_2(\mathbb{R})$ sur \mathbb{H} et le birapport est conservé par cette action. On pose $f : \alpha \in \mathbb{H} \mapsto [i, \alpha, -i, \bar{\alpha}]$. L'invariance du birapport par l'action de $\text{Stab}(m)$ montre que f est constante sur les cercles hyperboliques autour de i . On a donc $f(\alpha) = \phi(d_{\mathbb{H}}(i, \alpha))$. Un cercle hyperbolique centré en i intersecte la demi-droite des imaginaires purs au dessus de i en un seul point ki . On a alors le cercle hyperbolique décrit par $d_{\mathbb{H}}(i, \alpha) = |\ln(k)| = \rho$ et $f(ki) = \frac{4k}{(k+1)^2}$, or $k \mapsto \frac{4k}{(k+1)^2}$ est strictement croissante donc injective sur $[1; +\infty[$.

On en déduit que $\rho \mapsto \phi(\rho)$ est injective et que donc $f(\alpha) = f(\alpha')$ ssi $d_{\mathbb{H}}(i, \alpha) = d_{\mathbb{H}}(i, \alpha')$ ssi $\exists \eta \in \text{PGL}_2(\mathbb{R}) \simeq \text{Stab}(m), \eta.i = i, \eta\alpha = \alpha'$. Reformulé autrement on a :

Proposition. *Le birapport $[\Delta_1, \Delta_2, \overline{\Delta_1}, \overline{\Delta_2}]$ est un invariant de la configuration des deux droites, i.e. deux configurations sont les mêmes sous l'action de $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$ ssi les birapports sont les mêmes.*

Pour ce qui est de la distance induite, elle ressemble à celle donnée par un seul couple de droites, les géodésiques sont les mêmes et elle est non séparante aussi sur toutes les droites passant par m .

Cas $\iota(\Delta_1) \neq \iota(\Delta_2)$ $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$ est 2-transitif, on peut donc supposer $\iota(\Delta_1) = (1 : 0 : 0) =: m$ et $\iota(\Delta_2) = (0 : 1 : 0) =: m'$. On va alors regarder l'intersection de leurs stabilisateurs, il s'agit du groupe :

$$\left\{ \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad \neq 0 \right\}$$

On fixe a, b, c, d et on regarde la différentielle de son action en m , il s'agit de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ le coefficient directeur de Δ_1 , on veut envoyer le vecteur $(\alpha, 1)$ sur $(\pm ki, k), k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Cela impose donc $\frac{a}{d} = \pm \frac{1}{\Im(\alpha)}$ et $\frac{b}{d} = \pm \frac{-\Re(\alpha)}{\Im(\alpha)}$. On peut donc désormais supposer $\alpha = i$ ce qui donne $b = 0$ et $\frac{a}{d} = \pm 1$.

On regarde enfin la différentielle en m' , il s'agit de la matrice $\begin{pmatrix} 1/a & f/a \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$. Soit $\beta \in \mathbb{C}$ le coefficient directeur de Δ_2 , on veut donc envoyer $(\beta, 1)$ sur $(\pm i, 1)$. Cela impose $f = -\Re(\beta)$, $a = \Im(\beta)$.

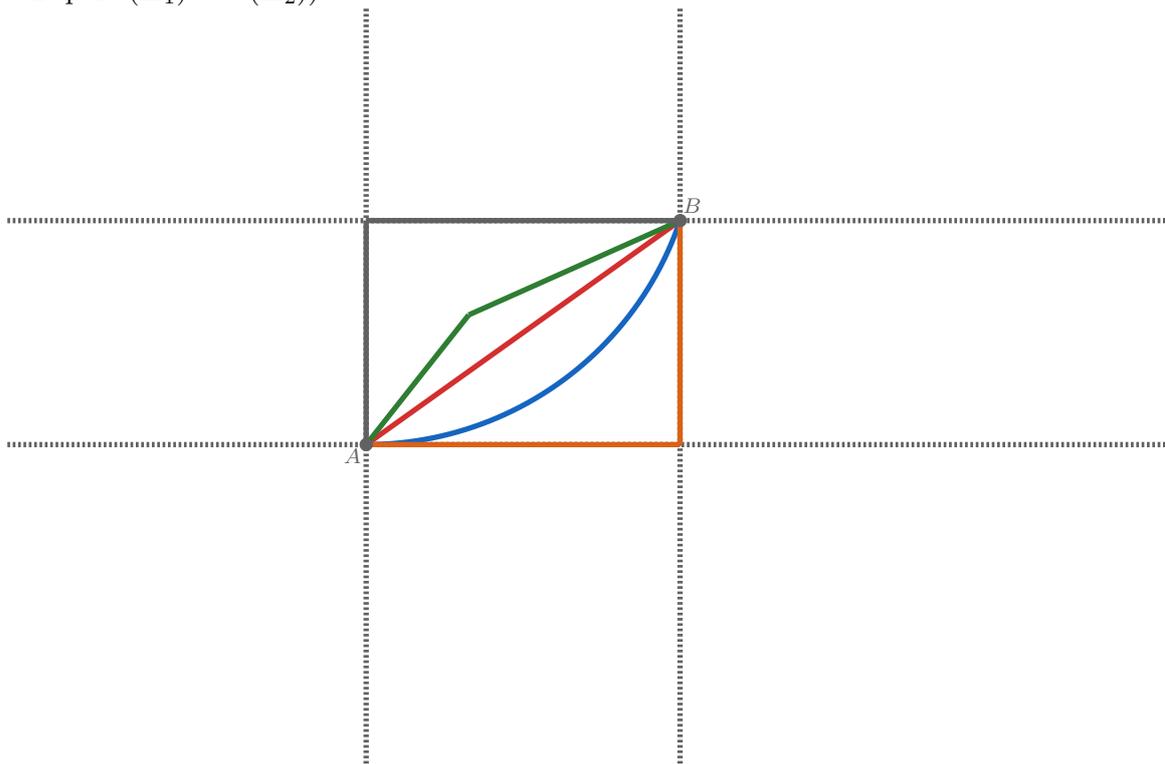
Proposition. *Toutes les configurations de deux couples de droites complexes conjuguées sont équivalentes sous l'action de $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$.*

En particulier en prenant $(z_1 = \pm iz_3)$ et $(z_2 = \pm iz_3)$ on obtient une expression de la pseudométrie :

$$d((x : y : z), (x' : y' : z')) = \left| \arctan \left(\frac{xz' - x'z}{xx' + zz'} \right) \right| + \left| \arctan \left(\frac{yz' - y'z}{yy' + zz'} \right) \right|$$

On obtient une distance sur la carte affine ($z_3 = 1$).

On peut alors s'intéresser aux géodésiques. Elles sont simples à décrire sur la carte affine, une courbe γ est une géodésique ssi $\dot{\gamma}_x$ et $\dot{\gamma}_y$ sont de signes constants. Par exemple si on veut un arc géodésique reliant $(0, 0)$ à $(2, -1)$ il faut un arc γ tel que γ_x soit croissant et γ_y décroissant. De manière intrinsèque, il faut toujours tourner dans le même sens autour de $\iota(\Delta_1)$ et de $\iota(\Delta_2)$ (dans le sens du plus petit arc entre les deux points que l'on veut relier). Sur la figure suivante, tous les chemins colorés sont des géodésiques entre les points A et B (les droites en pointillé passent par $\iota(\Delta_1)$ ou $\iota(\Delta_2)$).



Enfin, regardons les isométries dans $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$ quand on a fixé nos deux couples de droites. Les calculs précédents montrent qu'on y trouve

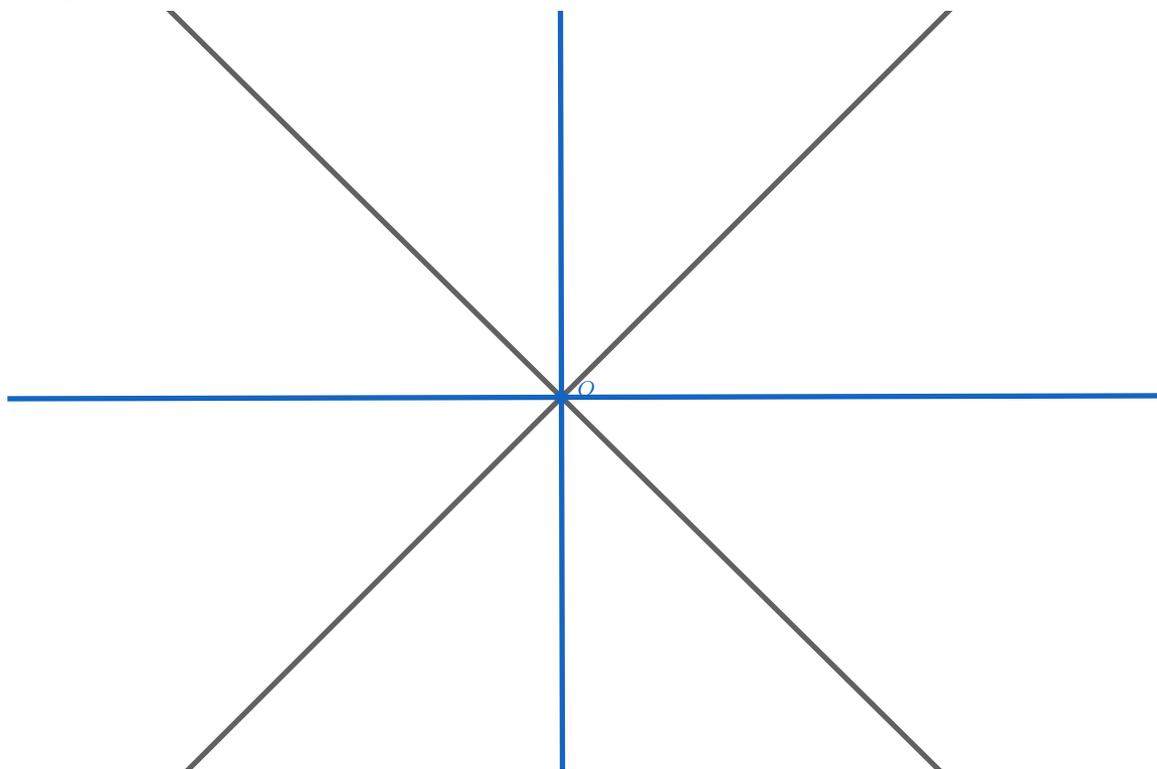
$$\text{Stab}(\Delta_1) \cap \text{Stab}(\Delta_2) = \overline{\{\text{Diag}(1, 1, 1), \text{Diag}(1, 1, -1), \text{Diag}(1, -1, 1), \text{Diag}(1, -1, -1)\}}$$

quand on ne fait pas bouger les points, ils correspondent à l'échange des deux droites formant Δ_1 et/ou Δ_2 .

De plus si les poids sont les mêmes on peut aussi échanger les deux points, des calculs du même genre que ceux effectués précédemment nous donnent le sous-groupe

$$\text{Stab}(\{\Delta_1, \Delta_2\}) = \left\{ \overline{\text{Diag}(1, 1, 1)}, \overline{\text{Diag}(1, 1, -1)}, \overline{\text{Diag}(1, -1, 1)}, \overline{\text{Diag}(1, -1, -1)}, \right. \\ \left. \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \right\}$$

Remarque. Il s'agit en fait du groupe diédral D_8 . L'action de ce groupe privilégie certaines droites de \mathbb{RP}^2 qui seront invariantes sous cette action. On a 4 droites complexes conjuguées elles s'intersectent en 2 paires de points complexes conjugués s, \bar{s}, r, \bar{r} (ici on a $r = (i : i : 1)$, $s = (i : -i : 1)$) et en $\iota(\Delta_1), \iota(\Delta_2)$. Les quatre premiers points définissent deux droites projectives réelles $(r\bar{r})$ et $(s\bar{s})$, celles-ci s'intersectent en un point O . La première droite est ici d'équation $y = x$ et la seconde $y = -x$, on a donc $O = (0 : 0 : 1)$. Ces droites, le point O et les droites $(O\iota(\Delta_1)), (O\iota(\Delta_2))$ sont des invariants projectifs et divisent le plan en 8 régions comme illustré sur la figure suivante.



En bleu les droites $(O\iota(\Delta_1)), (O\iota(\Delta_2))$ et en gris les droites $(r\bar{r}), (s\bar{s})$.

6.2.2 Cas de trois couples de droites distincts

On se donne ici $\mu = r_1\delta_{\Delta_1} + r_2\delta_{\Delta_2} + r_3\delta_{\Delta_3}$ on supposera $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ deux à deux distincts. On a vu qu'on pouvait envoyer Δ_1 et Δ_2 sur $(z_1 = \pm iz_3)$ et $(z_2 = \pm iz_3)$, mais en faisant cela, on détermine la position de Δ_3 à action de $\text{Stab}(\{\Delta_1, \Delta_2\}$ près.

La remarque faite précédemment nous fournit alors 2 axes et leur point d'intersection, décrivant ainsi 8 zones dans la carte affine. En particulier, si $\iota(\Delta_3)$ se trouve sur un des axes ou sur O , il le restera quand on fera agir $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$. Cela nous divise notre espace en huit régions. On regarde alors l'action de $\text{Stab}(\{\Delta_1, \Delta_2\}$ sur Δ_3 .

Si les poids de Δ_1 et Δ_2 sont les mêmes, on peut les permuter, l'orbite de $\iota(\Delta_3)$ contient alors un point dans chacune des 8 zones décrites par les droites $(O\iota(\Delta_1)), (O\iota(\Delta_2)), (r\bar{r})$ et $(s\bar{s})$. On peut

donc décrire une classe d'équivalence par le Δ_3 correspondant quand $\iota(\Delta_3)$ est dans une de ces zones en particulier (par exemple $x > 0, y > 0, y > x$). De plus si les trois poids sont les mêmes, on peut tenter d'échanger Δ_3 avec Δ_1 ou Δ_2 (le fait de donner une pente $\pm i$ à Δ_3 donnera celle qu'il avait à la droite avec laquelle on l'échange). En supposant $r_1 = r_2 = r_3$, on a un groupe d'isométries qui contient \mathfrak{S}_3 . Si les trois couples de droites sont en position générique, on a a priori pas d'isométries supplémentaires (inverser Δ_1 et $\bar{\Delta}_1$ changerait la position de $\iota(\Delta_3)$ et on ne serait a priori plus dans la même classe d'isométries sous l'action de $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$).

Conclusion

J'ai trouvé ce stage très intéressant et enrichissant. Je tiens encore une fois à remercier Charles Boubel pour le temps qu'il m'a consacré, pour ses réponses à mes nombreuses questions et pour m'avoir permis de découvrir un peu plus le monde de la recherche. Durant les quatre mois de stage j'ai pu assister à quelques conférences à l'université sur divers domaines des mathématiques, toutes très intéressantes même si je n'ai pas toujours tout compris. J'ai pu par le biais de ce stage acquérir des bases de géométrie projective, finslérienne et différentielle que ce soit par la lecture de livres, lors de discussions avec Charles ou bien en me posant mes propres questions et en tentant d'y répondre. J'ai aussi pu, comme le sujet s'y prêtait, en apprendre plus sur l'histoire des mathématiques, en particulier sur cette période charnière qu'a été la transition entre le XIXème et le XXème siècle.

En ce qui concerne le travail de recherche, j'ai pu apprendre à explorer des pistes, certaines fructueuses, d'autres moins; à surmonter les obstacles, parfois seul, parfois en en discutant avec d'autres personnes. Nous avons obtenu des résultats a priori nouveaux ce qui est assez satisfaisant, d'autant plus qu'ils feront probablement l'objet d'une publication dans l'année à venir (après un peu plus de travail sur le cas où la variété n'est plus auto-conjuguée, voire plus différentiable mais juste topologique). Bien que le premier ait un aspect un peu décevant en cela qu'il ne semble ouvrir aucune possibilité, la construction que nous avons trouvée vers la fin du stage semble encourageante pour remplir l'objectif fixé (ou peut-être n'y a-t-il en fait pas grand chose à en tirer).

La géométrie de Klein et Hilbert n'est qu'un domaine restreint de la géométrie métrique et différentielle et pourtant elle est assez vaste pour justifier de nombreuses questions (voir [1]) bien que nombre d'entre elles me soient encore difficile d'accès en raison de mon manque de connaissances en géométrie différentielle, riemannienne, finslérienne... Ce sujet avait l'avantage de ne pas faire appel à des notions trop compliquées à introduire et à assimiler, il m'a néanmoins fallu attendre la fin du stage pour commencer à avoir du recul sur tout ce que nous avons fait et pourquoi nous le faisons. Ce fut une très bonne expérience du milieu de la recherche.

Références

- [1] In Athanase Papadopoulos and Marc Troyanov, editors, *Handbook of Hilbert geometry*, chapter Open Problems. European Mathematical Society, 2010.
- [2] Norbert A'Campo and Athanase Papadopoulos. On Klein's So-called Non Euclidean Geometry. In *Sophus Lie And Felix Klein : The Erlangen Program and its Impact in Mathematics and Physics*, chapter 5. European Mathematical Society, 2015.
- [3] Jean-Pierre Demailly. *Complex Analytic and Differential Geometry*. 2012.
- [4] Ren Guo. Characterizations of hyperbolic geometry among hilbert. In *Handbook of Hilbert geometry*, chapter 6. European Mathematical Society, 2010.
- [5] Felix Klein. Sur la géométrie dite non euclidienne. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, 1871.
- [6] Athanase Papadopoulos and Marc Troyanov. From funk to hilbert geometry. In *Handbook of Hilbert geometry*, chapter 2. European Mathematical Society, 2010.
- [7] Pierre Samuel. *Géométrie projective*. Presses Universitaires de France, 1986.
- [8] Marc Troyanov. Funk and hilbert geometries from the finslertian viewpoint. In *Handbook of Hilbert geometry*, chapter 3. European Mathematical Society, 2010.